This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Miscellanea philosophico-mathematica ...

Societas Privata Taurinensis

Digitized by Google

1837
ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Digitized by Google

Digitized by Google

Mathematics
QA
1
.A2

Digitized by Google

Digitized by Google

MISCELLANEA
PHILOSOPHICO-MATHEMATICA.

Digitized by Google

Favete, adeſte aequo animo, & rem cognoſcite
Ut pernoſcatis, ecquid ſpei ſit reliquum.

Terent. Prolog. Andr.

Digitized by Google

R. Accademia delle scienze, Turin

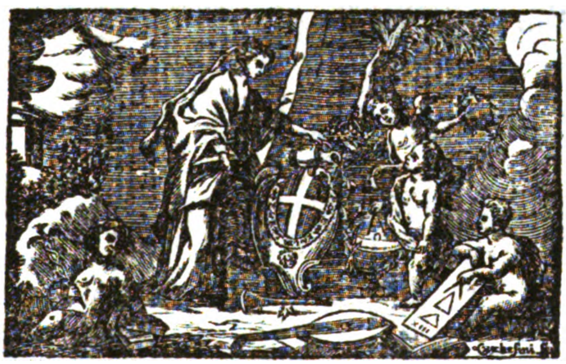
MISCELLANEA

PHILOSOPHICO -- MATHEMATICA

SOCIETATIS PRIVATAE

TAURINENSIS

TOMUS PRIMUS.



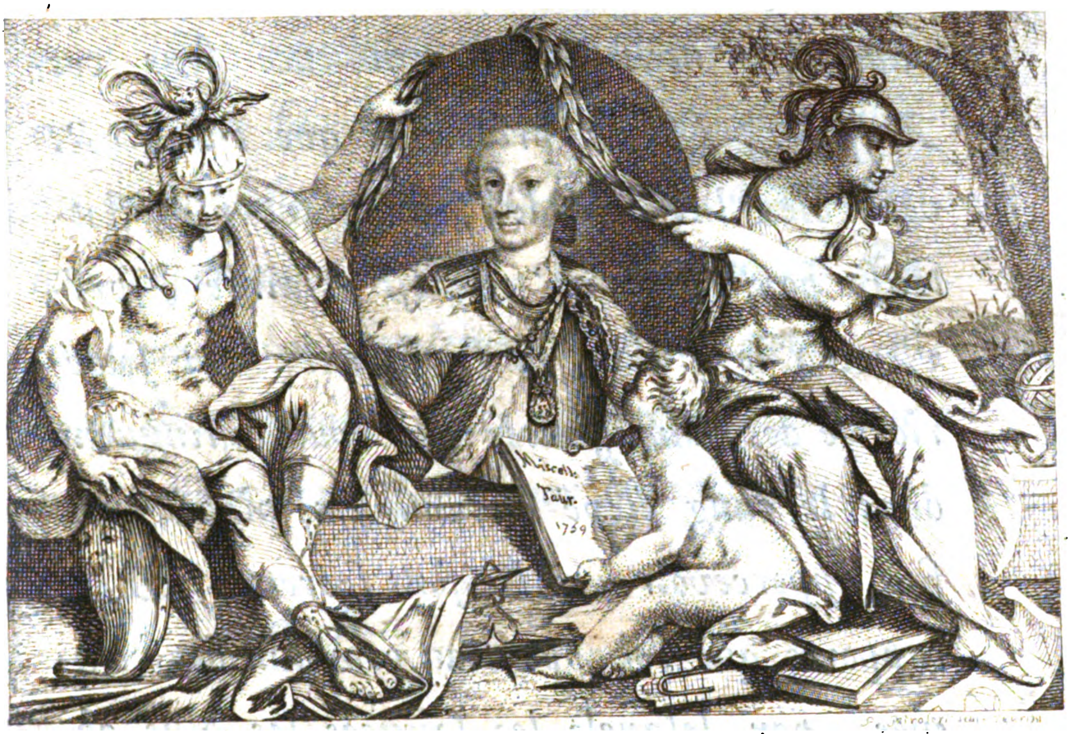
AUGUSTÆ TAURINORUM,

EX TYPOGRAPHIA REGIA.

MDCCLIX.

Digitized by Google

Digitized by Google



A SON ALTESSE ROYALE
MONSEIGNEUR LE DUC DE SAVOYE.

MONSEIGNEUR,

L'Ouvrage que nous avons l'honneur de vous préſenter eſt le prémier fruit des tra-

334576

Digitized by Google

vaux que nous avons commencé ſous vos Auſpices, & la protection que V. A. R. veut bien lui accorder, d'autant plus flatteuſe pour nous qu'elle eſt éclairée, préviendra le Public en ſa faveur. La ſupériorité des connoiſſances qui vous diſtinguent dans le rang élevé où vous êtes placé, vous fait appercevoir ces liaiſons ſecrettes, & ces rapports qui échappent au commun des hommes, par leſquels les ſciences les plus abſtraites conduiſent ſouvent aux plus utiles découvertes pour la Societé; c'eſt de ce point de vuë que vous vous intéreſſés à l'avancement des ſciences, & qu'en daignant jetter un oeil favorable ſur ceux qui les cultivent, vous nous retracés les grandes qualités qui brillent dans NOTRE AUGUSTE SOUVERAIN.

Digitized by Google

Puiſſe, MONSEIGNEUR, ce prémier eſſai répondre à ſon objet, & être en quelque façon digne de vous: ou puiſſe du moins nôtre exemple inſpirer à des talens ſupérieurs le déſir, & le courage d'y ſatisfaire plus amplement. Pour nous, il nous ſera toujours aſſés glorieux de pouvoir vous offrir nos reſpectueux hommages.

De V. A. R.

MONSEIGNEUR

Les très-humbles, & très-obéiſſans Serviteurs
Saluce, De La Grange, Cigna.

Digitized by Google

Imprimatur. Provic. S. Officii Taurini.

V. Berta LL. AA. P.

Se ne permette la Stampa

NICCOLO' DI QUAREGNA per la gran Cancellaría.

Digitized by Google

DE IIS, QUAE IN SOCIETATE ACTA SUNT

COMMENTARII

A JOH. FRAN. CIGNA

CONSCRIPTI.

Misc. Taur. Tom. I.

Digitized by Google

DE BELLINIANO PROBLEMATE,

SEU

DE OVORUM ELIXATORUM CICATRICULA.

CUM ova lampadis calore foveremus, parata machina ad imitationem illius, quae in Berolinenſis Academiae monumentis deſcribitur (a), praecipuos Auctores conſulebamus, qui de ovo, aut formatione pulli commentati fuerant, ut eorumdem lectione ſtudia noſtra dirigi poſſent, & adjuvari. Inter hos Bellinum quoque adivimus, penes quem cum praeclara multa, & laude digna reperiremus, tum illud in primis admirabile nobis videbatur, quod nomine belliniani problematis ſolemne eſt: cicatriculam, dum ova elixantur, e ſuperficie vitelli in centrum abire, idque

(a) An. 1749.

Digitized by Google

eo magis admirationem noſtram excitabat, quod in incubatis ovis rem aliter ſe habere, & cicatriculam poſt elixationem remanere in ſuperficie Bellinus ipſe traderet: tenebamur itaque deſiderio, ut rem miram noſtris oculis intueremur, cui ut ſatisfieret, ab incubatis ovis exordium duximus. Horum unum elixatum cortice, & albumine nudavimus, & cicatriculam cum contento pullo ad vitelli ſuperficiem revera invenimus paullo infra obtuſum ovi verticem medio, ut ſolet, inter *calazas* loco, & tenuiſſimae albuminis parti ſubjectam eſſe obſervavimus, quae omnia diligentius a nobis adnotata ſunt, ut eo facilius in poſterum, ſi quando opus eſſet, cicatriculam reperiremus. Obſervata cicatricula vitellum per centrum ſecuimus, & in centro ipſo praeter omnem expectationem corpus invenimus albidum, tenerum, quale nempe nomine cicatriculae ad centrum latae in ovis non incubatis, & elixatis Bellinus deſcripſerat: & hujus quidem corporis cum belliniana cicatricula omnimodam ſimilitudinem declaravit comparatio, quae cum cicatricula ad centrum recentis ovi elixati inventa inſtituta fuit: quae cum omnium, ut inquiebam, expectationem fefelliſſent, in cauſſa fuerunt, cur noſtrum aliquis hujuſmodi dubitationes proponeret. An non cauſſa, quae in ovis non incubatis, dum elixantur, cicatriculam ad centrum pellit, id multo magis in incubatis efficere deberet, in quibus incubationis calore cicatriculae nexus reſolvuntur, atque laxantur? An non fieri potuit, ut in ovis non incubatis cicatricula ad vitelli ſuperficiem poſita ob parvitatem Bellini diligentiam effugerit, qui dum ubique eandem ſollicite perquireret, in corpus album inciderit in centro vitelli poſitum, idque corpus ſimilitudine aliqua deceptus pro cicatricula habuerit? Enim vero ſi vera eſſet cicatricula in incubatis ovis, quorum cicatricula in ſuperficie remanet, ad centrum neutiquam reperiretur. Quamquam porro hiſce conjectationibus aliquam veri ſpe-

ciem

ciem ineſſe omnes faterentur, ne tamen iiſdem leviter adeo indulgeremus, Bellini fides, & auctoritas illuſtrium Scriptorum teſtimonio confirmata, & ingenuus veritatis amor prohibebant. Statuimus itaque in non incubatis, elixatiſque ovis vitelli ſuperficiem omni diligentia perluſtrare, ut experiremur, num forte hac in re Bellino feliciores eſſe poſſemus, ſecus arduam inquiſitionem dimitteremus potius, quam ut magni Viri diligentiae, aut candori temere quidpiam detraheremus. Suſcepta igitur inquiſitio eſt in primis ab Equite Salutio, qui non leve induſtriae, ac dexteritatis ſuae hac in re ſpecimen exhibuit; oſtendit enim in pleriſque recentibus ovis, quae elixari, ac indurari omnino curaverat cicatriculam ad vitelli ſuperficiem adhuc haerentem, quam cicatriculam eſſe, tum ex ſitu demonſtrabat, qui medius erat inter *calazas* paullo ſub obtuſo ovi vertice, & tenuiſſimae albuminis parti reſpondebat, ut in incubatis ovis contigiſſe diximus, tum ex figura, quae annulis conflata erat, & cicatriculam recentium ovorum non elixatorum plane aemulabatur, tum demum ex aliquali ejuſdem prominentia ſupra vitelli ſuperficiem, quam reſpondens indurati albuminis foveola recipiebat; adeo, ut integro adhuc albumine exteriora ovi perluſtrans cicatriculae locum certiſſime indicaret. Ad centrum porro albidum Bellini corpus perpetuo inveniebat, dummodo nec nimis parum, nec diu nimis excocta ova fuiſſent, quibus in caſibus vel nullum, vel obſcurius id corpus conſpiciebatur. Haec cum saepiſſime omnium oculis Vir diligentiſſimus exhibuiſſet paullo liberius de belliniani inventi veritate dubitare caepimus, Auctoreſque perquirere, ſi qui forte experimenta haec iteraſſent, aut illuſtraſſent, ut ex illorum obſervationibus noſtrae confirmari, vel refelli poſſent. Occurrebat itaque Cl. Balbi diſſertatio bononienſibus commentariis inſerta (*b*), in qua cum Bel-

(*b*) Tom. 2. par. 2. pag. 369. & ſeq.

Digitized by Google

lini experimenta renovaſſet problematis ſolutionem ex mechanicis principiis deducere conatus eſt. In illis autem experimentis obſervavit, poſtquam ova ſex horae minuta in ebulliente aqua detenta ſunt, cicatriculam adhuc ſuo manere loco, quamquam altius eo tempore vitellus obduruerit. Inde vero novum dubitationi noſtrae fundamentum acceſſit; neque enim ullo modo concipere poteramus, quo pacto cicatricula per obduratum vitelli ſtratum permeare potuiſſet in tanta teneritudine, & integra deinceps ad centrum pervenire. Poſtquam novem horae minuta ova in ebulliente aqua Balbi detinuiſſet, cicatriculam in centro vitelli ſe reperiiſſe refert evidentiſſimam; ſub-albidum ſcilicet corpus a Bellino habitum pro cicatricula; eo autem in loco de vitelli ſuperficie non meminit Cl. Auctor, ut videatur Bellini fidei innixus corpus illud albidum, quod in centro repererat, pro cicatricula habuiſſe, omnemque adeo cicatriculam in vitelli ſuperficie inveniendi curam abjeciſſe, utpote quam inutilem fore praevideret. Nos contra, quibus Bellini obſervationes jam ſuſpectae erant, in ovis iis, quae decem, & ultra minuta in ebulliente aqua elixata fuerant reperta cicatricula ad vitelli ſuperficiem poſita, hanc comparabamus cum illa, quam in ovis, quae quinque tantum minuta elixata fuerant, Balbi deprehenderat, cumque omnino ſimilem eſſe cerneremus, jam nulla ſupererat dubitatio, cicatriculam poſt quodcumque ebullitionis tempus nunquam a vitelli ſuperficie recedere. Ad albidum corpus quod ſpectat in centro vitelli poſitum, tum in ovis non incubatis, quod Balbi obſervaverat, tum in incubatis, quod noſtrae obſervationes nos docuerunt, non reperiri, aut obſcurius cerni certum eſt, quando vel diutius, quam par eſſet, vel per brevius tempus in ebulliente aqua ova detenta fuerunt.

Ne autem in tanta clariſſimorum Virorum aliter ſentientium auctoritate noſtrae obſervationes ſua veritate, & fide

deſti-

deſtituerentur Cl. Bertrandi Regium Chirurgum, Regiumque Profeſſorem, ac Pariſienſ. Chirurg. Acad. Socium earundem participem eſſe voluimus, qui poſtquam ipſas pluries omni diligentia renovaſſet, ambiguas neutiquam eſſe concluſit. Gaviſi itaque non mediocriter fuimus qualiacumque haec tentamina omni difficultate phyſicos expedire.

DE VARIA BAROMETRORUM DIVERSAE DIAMETRI ALTITUDINE.

1. CUM Bononienſis Academiae commentarios pervolverem, atque ex praeclaris inventis, quibus elegantiſſima volumina referta ſunt, plurimum jucunditatis, utilitatiſque perciperem, in eum locum incidi, ubi Clar. Balbi experimenta narrantur, quae ad variam barometrorum diverſae diametri altitudinem ſpectant, eamque Clariſ. Auctoris ſententiam eſſe intellexi, ut cenſeat capillarium tuborum exemplo, minorem anguſtiorum barometrorum altitudinem a majori tuborum, quibus conſtruuntur vi repellente eſſe repetendam (a), ita tamen, ut repellens ea vis in ſuperiori vacua barometrorum parte in primis ſedem habeat (b), & (quemadmodum experiundo invenit) frigore ad eam partem admoto imminui poſſit, reſtituto calore iterum adaugeri (c). Cum vero haec ſemel, iterumque attente perlegiſſem, quemadmodum Clariſ. Viri induſtriam, & experiundi peritiam magnopere admirabar, ita de phaenomeni cauſſa penitus conſentire non poteram.

2. Primo enim animadvertebam vim repulſivam tuborum capillarium, ſi quae ſit, eam in vacua parte minime poſitam

(a) Com. t. 2. par. 1. a pag. 307. ad 311., & a pag. 353. ad 360.
(b) Ibid. p. 354. & ſeq.
(c) Ibid. p. 356.

ſitam eſſe, cum diametro tantummodo reſpondeat, nec varia vacuae partis longitudine mutetur (*d*), nec proinde barometrorum vim repellentem in vacua parte eſſe reponendam. Deinde vero ſi vel maxime in vacua barometrorum parte vis repellens locata eſſet, eam frigore augeri potius, quam minui debuiſſe, quandoquidem, ut ipſe Balbi advertit, frigoris vi tubi conſtriguntur (*e*), eoque magis, quod in tubis capillaribus nulla hujuſmodi proprietas nec a Balbi, nec ab aliis fuiſſet obſervata.

3. Conjecturam itaque feci mercurii depreſſionem in anguſtioribus barometris deberi potius preſſioni relicti in vacua parte aëris, qui vel majori copia in anguſtioribus tubis adeſſet, vel arctius ſpatium nactus, proindeque denſior ſubjectum mercurium vehementius comprimeret, admoto autem ad ſupremam barometri partem frigore ita conſtringeretur, ut minorem preſſionem exerceret. Enim vero dum perpendebam, quam difficile ſit omnem e barometris aërem penitus expellere, dum difficultatem in anguſtioribus tubis majorem eſſe cogitabam, dum Muſchembroekii diligentiam in omni expellendo aëre Balbi ſupervacaneam exiſtimaſſe legebam (*f*), non parum in mea ſuſpicione confirmabar.

4. Eo itaque adductus ſum, ut meam hanc qualemcumque ſuſpicionem cum Sociis communicarem, quos inter Ludovicus de la Grange eamdem non modo non improbavit, verum etiam experimentum indicavit, quo definiri facile poſſet: propoſuit nempe, ut accuratiſſima barometra conficerentur ex tubis diverſae diametri, qui in infima parte flexi ſurſum crus promitterent barometrico tubo aequale, &

(*d*) Inſtitut. Newton. de M. Sigorgne §. 364. 377.
(*e*) L. c. p. 356.
(*f*) L. c. p. 357. cum ſimilia experimenta Florentini propoſuiſſent ex hac ipſa cauſſa pendere Muſchembroechius definivit cum in accuratiſſimis barometris calore, aut frigore ad ſupremam partem admoto mercurii altitudinem non mutari obſervaverit. Vide additamenta ejuſdem ad Acad. Flor. in Collection Académique partie étrang. Tom. 1. p. 26.

& parallelum, ut in ipſum mercurius infundi poſſet, ſicque aër, ſi quis eſſet, in vacua barometri parte in brevius ſpatium coërceri. Si enim, inquiebat, addito per vices mercurio, ipſius altitudo ſupra libellam minueretur, & decrementa altitudinis relicti poſt ſingulas additiones in ſuprema barometri parte vacui ſpatii inverſam rationem ſequerentur, inde confici poſſe depreſſionem barometri tribuendam eſſe fluido elaſtico in ſuperiori barometri parte contento, cujus elaſticitas in ratione inverſa voluminis adaugeretur, qualem aëris proprietatem eſſe ad certos uſque limites Phyſici noverunt (*g*).

5. Experimentum igitur caepimus, omnique diligentia ſaepe iteravimus, cum barometrorum alterum vix dimidiam lineam in diametro haberet, alterum paullo minus quam duas, & mercurius quidem in anguſtiori tubo quatuor circiter lineas inferius haeſit, quam in ampliore, infuſoque, ut propoſitum erat, in crus alterum mercurio altitudo barometri ſupra libellam imminuta eſt, ita ut decrementa altitudinis relicti in ſuprema parte vacui ſpatii inverſam rationem quam proxime ſervarent, quamquam in horizontali ſitu collocato barometro exigua tantum in ſuprema parte aëris bulla deprehenderetur, quae vix aciculae caput magnitudine aequaret. Verbo dicam, talem fuiſſe hujus experimenti exitum, ut Cl. Auctor jam exploratum narraſſe, potiuſquam novum propoſuiſſe videretur. Jam vero ſi a vacua barometri parte mercurius repelleretur, imminuta vacuae partis longitudine ſimul & repulſio minui debuiſſet, ut Bononienſes Academici alicubi fatentur (*h*): at contra, ut dictum eſt, mercurii depreſſio major evadebat.

B 6. Quam-

(*g*) Cogitavi deinceps experimentum faciliori opera abſolvi poſſe etiam barometris qualia a Phyſicis parari ſolent, dummodo magis, minuſve iiſdem inclinatis, & magis, minuſve ea ratione condenſato, ſi quis eſſet, in vacua parte aëre normalis mercurii altitudo ſupra libellam metiretur, & varia ipſius decrementa, aut incrementa notarentur.

(*h*) P. 355.

6. Quamquam porro eo in experimento expectationi eventus adamuſſim reſpondiſſet, nondum tamen eidem acquievi, quin imo veritus ſum, ne minori diligentia noſtra barometra conſtructa fuiſſent, atque adeo reſidui aëris preſſio ſimul cum vi vitri repellente conjungeretur, cum in iis, quae accuratiora Balbi paraſſet, ſola vis repellens omnem depreſſionem effeciſſet. Alio itaque experimento directe inveſtigare conſtitui, quantum tuborum vis repellens, ſi quae eſſet, in deprimendo mercurio valeret.

Itaque animadvertebam vim repellentem ab aëre non oriri, nec ab aëris actione ullo modo mutari (*i*) oportere, adeo ut, ſi quae differentia eſſet vis repulſivae inter binos tubos barometricos, eadem etiam in iis apertis ſe proderet. Binos igitur tubos, quorum unus duas lineas patebat in diametro, alter vix unam, ita inferiori extremitate jungendos curavi, ut deinceps flexi ſurſum normaliter erigerentur, juncturae autem locus eſſet in media inferiori parte. Tuborum parietes eamdem propemodum craſſitudinem habebant, eodem vitro conflati fuerant, altitudo erat eadem, quanta barometrorum eſſe ſolet, erat autem uterque apertus in ſuperiori extremitate. Hos mercurio implevi ad eam altitudinem, ad quam mercurius in barometro ſuſpenditur, ut differentia altitudinis mercurii in binis tubis differentiam vis repulſivae in barometris ejuſdem diametri oſtenderet: veruntamen mercurius ad libellam propemodum compoſitus eſt, ut vix tertia, quartave lineae parte in anguſtiori tubo depreſſior deprehenderetur. Dum vero hoc experimentum cum iis comparabam, quae Cl. Galeatius inſtituit, in quibus nempe inter barometra ejuſdem diametri differentiam altitudinum trium linearum fuiſſe obſervavit (k), veroſimillimum videbatur depreſſionem eam barometrorum a Balbi obſervatam vel plane

totam,

(*i*) Sigorgne l. c. §. 329.
(*k*) P. 309. 310.

totam, vel ſaltem maxima ex parte alii cauſſae, quam vi tuborum repellenti eſſe adſcribendam.

7. Dum haec tentarentur, Eques Salutius novam indicavit experimenti ſpeciem, quae rem totam mirifice illuſtrare non tantum poſſet, verum etiam ſola quaeſtioni abſolvendae ſufficeret: propoſuit nempe, ut communicantes barometrici tubi, quibus in ſuperiori experimento uſus fueram (6) mercurio implerentur, tum in vas mercurium continens inverterentur; ſic enim bina barometra inaequalis diametri eſſe prod.tura, quae cum commune in ſuprema parte vacuum ſpatium haberent, aequalem etiam a reſiduo, ſi quis forte remaneret, in ea parte aëre preſſionem paterentur, atque adeo ſolum effectum vis repulſivae ſuarum altitudinum differentia certiſſime definirent.

Eos igitur tubos iterum replevimus, & candentium prunarum calori expoſuimus, ut mercurius ebulliret, ſicque prodeuntes ab ipſo aëreae bullae per immiſſum, blandeque commotum filum ferreum educerentur: his peractis, inverſiſque tubis eamdem fere ac in ſuperiori experimento altitudinum differentiam invenimus, quae ſcilicet tertiam, quartamve lineae partem aequaret.

8. Quidquid igitur de priori experimento ſentiendum ſit (6), poſtremo (7) difficultatem omnem tolli, & noſtram ſententiam luculentiſſime confirmari cenſemus. Erant enim bina barometra, quae in reliquis cum Academicorum Bononienſium barometris omnino convenirent, atque adeo vis repulſivae effectum non minus, quam illa oſtendere deberent: quapropter cum Bononienſes Academici multo majorem altitudinum differentiam obtinuerint, concludendum omnino eſt, copioſiori aëri in minori barometro relicto eamdem eſſe adſcribendam, quum commune in noſtris barometris vacuum ſpatium nullam hujuſmodi differentiam admitteret. Voluimus etiam experiri, num ex admota glacie ad ſupremam partem altitudo mercurii adaugeretur, &

magis quidem in anguſtiori barometro, num contra ex admoto calore minueretur, & magis quidem in minori, id enim ex Balbi theoria ſequebatur, cum noſtra contrarium ſuaderet; altitudinum namque incrementa, & decrementa in utroque tubo aequalia futura erant, ſiquidem ex condenſatione, & rarefactione relicti in vacua parte communis aëris penderent, cum inaequalia eſſe deberent, ſi ab aucta, vel minuta tuborum vi repellente orirentur. Sed fruſtanea fuit in hanc rem adhibita opera; neque enim vel ex admotis calidis linteis, vel ex admota glacie mercurii altitudo in tubis mutata eſt; deinceps vero cum aëris aliquae bullae in eam vacuam partem conſulto admiſſae fuiſſent, tunc equidem glaciei frigore mercurium elevari, ex linteorum calore iterum deprimi obſervavimus; ut tamen altitudinum incrementa, & decrementa in utroque tubo ad amuſſim aequarentur: ex quo fit manifeſtum mercurii altitudinem ex frigore, vel calore non mutari, ſiquidem ſuperior barometri pars aëre accuratiſſime vacua ſit, quod vero incrementum, vel decrementum ex calore, & frigore obſervatur, id relicto in ea parte aëri tribuendum eſſe, qui aequalia incrementa, & decrementa efficiat, ſi communis, & aeque denſus in utroque barometro ſit, quemadmodum in noſtro experimento contingit, inaequalia vero, ſi inaequali copia, & impari denſitate relinquatur, quemadmodum in Bononienſium barometris accidiſſe ex hactenus dictis colligi poſſe cenſemus.

9. Eoſdem tubos iterum mercurio puriſſimo implevimus, & pari induſtria aëre expurgavimus, eamdemque altitudinum differentiam obtinuimus. Iterum pariter glacie per immiſſum nitri ſpiritum admodum refrigerata, & candentibus bracteis ferreis ſupremam partem refrigerare, & calefacere per vices curavimus; at non minus fruſtranea opera noſtra fuit, cum aeque immobilis, ac in priori tentamine mercurius perſtitiſſet.

10. Eoſdem etiam tubos ex utraque parte apertos in vas mercurio plenum injecimus, ut depreſſionum differentiam reperiremus, eamque iterum tertiam, quartamve lineae partem non excedere obſervavimus, in qua conſtanti experimentorum conſenſione (6. 7. 9.) veritatis non leve argumentum ineſſe conſideranti patebit.

11. Aliqua quidem naſcebatur difficultas ex iis experimentis, quae in vacuo boyleano a Viris Cl. capta ſunt: in quibus nempe educto aëre, & mercurio in utroque barometro deſcendente, auctaque adeo vacuae partis capacitate, differentia tamen altitudinum eadem perſeverabat, id enim Cl. de la Grange experimento in primis adverſabatur. Etenim ſi in eo experimento imminuta vacuae partis capacitate differentia altitudinum augebatur, aucta in hoc experimento eadem capacitate differentia imminui ſimiliter debuiſſet. Legebamus quidem Plantadium obſervaſſe in montibus ultra centum hexapedas altis omnem differentiam ſublatam fuiſſe, quod cum Bononienſium experimentis opponeretur noſtrae theoriae, & experimentis apprime erat conſentaneum: quamquam enim ipſi proponant in Plantadii obſervatione vi frigoris in montibus eam differentiam ſublatam fuiſſe, cum tamen, ut demonſtravimus, frigus differentiam non minuat, niſi relicti aëris elaſticitatem minuendo minime dubium videtur, id etiam magna ex parte ex deſcenſu mercurii, & ejuſdem aëris rarefactione contigiſſe, ex qua non minus quam ex frigore ejuſdem elaſticitas minor evadit.

12. Ea igitur experimenta repetenda ſuſcepimus, ut ſi fieri poſſet, diverſitatis cauſſam aſſequeremur: & revera maximam in iiſdem varietatem invenimus. Quando enim barometris utebamur, quae ſupra candentes prunas aëre expurgata non fuerant, inter exanthlandum altius barometrum depreſſiori aequale evadebat, & ceſſante emboli motu priſtina differentia redibat, quemadmodum Bononienſes obſervarunt; alias, quando accuratiſſime ſupra candentes

prunas

Digitized by Google

prunas barometrorum mercurius aëre fuerat repurgatus, durante emboli motu amplius barometrum deprimebatur, & in eadem depreſſione etiam ceſſante emboli motu permanebat, quod cum Plantadii experimento in primis convenire videtur. Arbitrabamur itaque in priori caſu, ceſſante emboli motu, novum aërem, & quidem copioſius in anguſtiori barometro ex parietibus labente mercurio detectis, vel ex mercurio ipſo prodiiſſe, eumque aërem priſtinam differentiam reſtituiſſe, quod in barometris aëre expurgatis ſimiliter contingere non potuerit.

13. Revera haſce deſcenſuum anomalias aëri in ſuprema barometrorum parte contento, vel deinceps a mercurio, aut vitro erumpenti tribuendas eſſe demonſtrat experimentum barometris communicantibus in machina pneumatica inſtitutum; ea quippe barometra, quae eandem propemodum, ut dictum eſt (7), altitudinem habebant, dum aër educeretur, aequali omnino celeritate deſcendebant, & eamdem altitudinis aequalitatem ſervabant etiam quieſcente embolo, & ſimiliter aëre in recipiens pneumaticum pedetentim admiſſo pari gradu aſcendebant, ut aeque alta perpetuo remanerent.

14. Supereſt, ut moneam Muſchembroeckium, Deſagulierium, Sigornium, alioſque primae notae Phyſicos oſtendiſſe, mercurium a vitro non ſolum non repelli, quin potius ab eodem attrahi; depreſſionem autem mercurii in capillaribus tubis fieri docuiſſe exceſſu vis attrahentis partium mercurii inter ſe ſupra vim attrahentem vitri (*l*); quapropter cum ea attractionis differentia locum non habeat,

(*l*) Mercurium abſque vi repellente deprimi poſſe cognovi, dum ipſum inter aeneam bracteam ad acutiſſimum angulum flexam ita in curvam ſinuari obſervavi, ut maxime depreſſus prope angulum eſſet, & eo elatior, quo magis bracteae crura divergerent, non ſecus ac inter vitreas laminas contingat. Mercurium autem ab aere repelli nemo dixerit, cum in eo ipſo experimento aeneae laminae margo in mercurium immerſus eodem imbutus, infectuſque ſit & mercurius a Chymicis cum aere in amalgama uniatur &c.

beat, ſi barometrum ex unico inflexo tubo conſtruatur, abſque eo quod in ſubjectum vas mercurio plenum immergatur, patet modus, quo in anguſtiſſimis etiam barometris mercurii depreſſio ab ea cauſſa orta declinari poſſit. Hoc autem artificium etiam in hypotheſi vis repellentis ipſius effectus praecavebit; cum enim vis repellens perinde ac vis attrahens, ſi quae ſit in tubis, eadem remaneat quaecumque ſit ipſorum longitudo, & quantacumque ipſorum pars in attractum, aut repulſum fluidum immergatur (*m*), manifeſtum ſit repulſionem mercurii in barometro haerentis a repulſione ejuſdem in altero crure elidi, ac corrigi debere.

DE CORRIGENDIS BAROMETRORUM ERRORIBUS EX CALORE, ET FRIGORE NATIS.

I. BArometrorum mutationes non ſolum ex variata atmoſpherae preſſione ortum ducere, verum etiam ex vario caloris gradu, qui mercurii denſitatem immutet a longo jam tempore Phyſicis innotuit, factumque propterea eſt, ut effectibus caloris a gravitatis effectibus diſtinguendis ab eo tempore incubuerint: veruntamen correctiones hujuſmodi propoſuerunt, quae pro unaquaque barometri obſervatione experimenta requirerent, aut computationes, quorum alterum difficile erat, alterum incommodum. Laudabile proinde viſum eſt Ludolff conſilium, qui in monumentis Acad. Sc. Berol. (*a*) talem correctionem propoſuit, ut abſque experimentis, & abſque computis ex ſolius ſcalae barometricae obſervatione vera atmoſpherae preſſio quocunque tempore cognoſceretur. Id

dumtaxat

(*m*) Quae de attractione Sigornius demonſtrat §. 330. 375. ad vim repulſivam transferri facile poſſunt, cum eae vires non niſi ob contrariam directionem inter ſe differant.

(*a*) An. 1749.

Digitized by Google

duntaxat in ea correctione incommodi ſupererat, ut ſcalae conſtructio, quam Vir Cl. exhibuit non admodum facilis, & expedita videretur, & thermometri comparationem perpetuo poſtularet. Cum itaque de eo etiam incommodo tollendo cogitarem, Cl. de la Grange ea de re collocutus ſum, qui unica obſervatione problema hoc ita abſoluit, ut nihil in hac re deſiderari amplius poſſe videatur. Inquiebat enim incrementum altitudinis mercurii ex dato caloris gradu natum eſſe, ut altitudinem columnae mercurii, quae ei calori exponeretur, ac proinde ſi barometra ex unico inflexo tubo conficerentur, ita ut in crure altero mercurii altitudo unius tantum, aut duorum pollicum eſſet, rareſactionem mercurii, & condenſationem in eo crure tam exiguam altitudinis differentiam eſſe effecturam, ut negligi tuto poſſet; nil igitur aliud eſſe faciendum, niſi ut ſcala altitudinum breviori barometri cruri apponeretur; ſic enim aſcenſus, ac deſcenſus, ex mutata aëris gravitate natos aequae percipi, interea dum mutationes ex calore productae ſenſibilem errorem non parerent.

2. Cum porro quantum mercurius in uno crure adſcendit, tantundem in altero deſcendat, & contra, variatio altitudinis mercurii ſupra libellam dupla eſt ſpatio a mercurio deſcendendo, vel adſcendendo percurſo: quapropter ut ſcala veram altitudinem ſupra libellam ſignificet in hac loco pollicum ſemipollices, linearum loco ſemilineae ponendae ſunt, & pro integris pollicibus, ac lineis integris deinceps aſſumendae; inde autem conſtat in hac barometri ſpecie errores a rarefactione natos duplos eſſe ipſa rarefactione.

3. Quod ſi igitur quis paullo acuratior, & diligentior errorem quoque ex minoris cruris rarefactione natum (1) declinare cupiat, in promtu correctio eſt ab eodem fonte petita: ſi enim binae ſcalae conſtruantur, quarum una barometro ipſi apponatur, altera breviori barometri cruri,

ita

ita ut haec adſcendendo imminuatur, illa adaugeatur, quamdiu mercurius in eadem denſitate perſeverabit, utraque ſcala eundem gradum oſtendet, mutata vero denſitate, diverſi gradus prodibunt, quorum ſemidifferentia totius voluminis incrementum, vel decrementum ſignificabit. Poterit autem in ſcalis aptandis certa, & determinata mercurii denſitas aſſumi, quod nos in noſtris barometris parandis praeſtitimus: tubo enim cartaceo totum barometrum incluſimus, & comminuta glacie intervallum replevimus, ut in utroque crure congelationis frigore mercurius condenſaretur. Deinceps mercurii altitudinem in utroque crure filo notavimus, & differentia altitudinum inventa, ad utrumque crus opportunam ſcalam aptavimus, quae eam differentiam exprimeret (2).

4. Similibus peractis ſpatium a mercurio congelationis tempore occupatum, quod aequale eſt longitudini cilindri intra cognomines quoſcumque utriuſque ſcalae gradus intercepti, ſemel dimetiendum eſt; huic enim ſi addatur, tota mercurii rarefactio (3) habebitur, quocumque tempore volumen mercurii rarefacti.

5. Porro altitudo mercurii in minori crure eſt minor vera dupla quantitate rarefactionis (2) in eodem crure; rarefactio autem tota aequatur ſummae duplae rarefactionis in minori crure, & rarefactionis mercurii ſupra libellam exiſtentis: quare ſi altitudini minoris cruris addatur rarefactio tota, habebitur altitudo vera aucta rarefactione mercurii ſupra libellam exiſtentis, ſeu aucta ſua rarefactione.

6. Quare ſi fiat, ut volumen totius mercurii rarefacti ad volumen ejuſdem condenſati (4) ita altitudo mercurii rarefacti ſupra libellam (5) ad quartam proportionalem, haec dabit veram mercurii altitudinem (*b*).

7. Haec

(*b*) Scalarum constructio ea eſt, ut gradus in inferiori deſcendant, dum in ſuperiori aſcendunt, quo ſit, ut extremitates columnae mercurii fri-

Digitized by Google

7. Haec autem correctio tum accuratioribus, ut diximus, ſatisfacere poteſt, tum uſui eſſe, quando mercurius deſcendit per inſignem altitudinem, & propterea rarefactio minoris cruris inſigniter augetur, quod in altiſſimorum montium altitudine barometri ope dimetienda fere contingit, quando correctionis uſus in primis neceſſarius videtur ob frigus in montibus magis, magiſque plerumque adauctum, prout loci altitudo adaugetur. Coeterum cum aſcenſus mercurii in minori crure, ex maxima atmoſpherae mutatione ſit unius pollicis cum dimidio, ſi minima mercurii altitudo in eodem crure ponatur ſemipollicis, erit altitudo maxima duorum pollicum, atque adeo ejus rarefactio erit $\frac{1}{15}$ circiter rarefactionis in crure majore, & altitudo ab ipſo crure notata pro vera aſſumi plerumque poterit abſque ſenſibili errore.

8. Hoc

gore glaciali condenſati ſemper ad gradus cognomines pertingant, qui gradus exprimunt altitudinem ejuſdem mercurii condenſati ſupra libellam; ſit itaque in hoc mercurii ſtatu numerus graduum, quem utraque ſcala quocumque dato tempore exhibet, $= r$, & immutato atmoſpherae pondere ponamus mercurium ſubito rarefieri evidens, eſt quantitates materiae in unaquaque columna eaſdem remanere debere, dum ejuſdem volumina per ſpatia quaevis augebuntur. Exprimantur haec columnarum incrementa per m, & n, & quoniam menſurae graduum in ſcalis dimidiae tantum ſunt verarum, prodibunt in ſcala ſuperiori gradus $r + 2m$, & in inferiori $r - 2n$; hi ſunt gradus, qui ex immediata obſervatione ſemper habentur. Sit itaque numerus graduum in ſcala ſuperiori a mercurio notatus $= a$, & numerus graduum reſpondens in inferiori $= b$, & erit $r + 2m = a$; $r - 2n = b$ ſubtrahatur haec aequatio ab illa, & reſiduo per 2 diviſo exurget $m + n = \frac{a-b}{2}$; quae adeo erit aequalis rarefactioni totali. Addantur nunc ambae aequationes, & ſummis per 2 diviſis habebimus $\frac{a+b}{2} = r + m - n$, quae formula, ut videre eſt exhibet volumen primum mercurii ſupra libellam, cum ſua rarefactione, quae aequatur differentiae rarefactionum ambarum columnarum. Si itaque c ſit longitudo totius cilindri mercurialis frigore condenſati; ſequentem analogiam poterimus inſtituere $c + \frac{a-b}{2} : c = \frac{a+b}{2} : \frac{ca+cb}{2c+a-b}$, quae quarta proportionalis exhibebit quocunque tempore altitudinem mercurii ſupra libellam ad eundem ſemper condenſationis ſtatum redacti.

Digitized by Google

8. Hoc porro barometrum quanquam duplo minus ſenſibile ſit, quam reliqua, plures tamen utilitates complectitur, quod nec ſcalam mobilem poſtulet, nec obnoxium ſit depreſſioni ex tuborum anguſtia natae, nec demum ob caloris, frigoriſque viciſſitudines, in errorem inducat.

DE FALLACIA METHODI DIMETIENDI QUANTITATEM ATTRACTIONIS.

INquiſiturus, num aliqua, & quanta mercurium inter, & vitrum adhaeſio intercederet, utebar methodo a Tayloro, aliiſque tradita, ex altero nempe bilancis brachio vitrum planum ſuſpendebam in ſitu orizontali, & appoſito in altero brachio aequipondio, ſuppoſitoque mercurio, vitri inferiorem ſuperficiem mercurii ſuperficiei aptabam, & ex pondere in altero bilancis brachio addendo ad vitrum e mercurio divellendum adhaeſionis vim metiebar, cumque non exiguum pondus ad id requiri experirer, maximam mercurium inter, & vitrum adhaeſionem ea methodo me inveniſſe, ac demonſtraſſe exiſtimabam. Fallacem methodum eſſe amice monebat Ludovicus de la Grange, eamque adhaeſionem externi aëris preſſioni aut totam, aut ex parte eſſe adſcribendam, cumque reſponſionis loco nihil ſuppeteret, quod afferrem, niſi Cl. Virorum auctoritatem, qui ea methodo eodem ſcopo ſaepe uſi fuerant, ad experimentum provocabat inter corpora, inter quae nullam adhaeſionem eſſe, apud Phyſicos in confeſſo eſſet. Itaque unanimes id ipſum experimentum vitro oleo madido, ſubjecta aqua tentavimus, ſed magnum quoque pondus ad id vitrum ab aqua divellendum neceſſarium fuiſſe invenimus; obſervabamus duntaxat, majus, minuſve pondus requiri, prout contactus magis, minuſve eſſet accuratus, prout nempe plures, pauciores ve aëris bullae vitrum inter, & aquam eſſent interpoſitae. Cum autem in eo experimento

reri liceret, ne olei ſtratum minus craſſum eſſet, quam ut ſufficere poſſet vitri, & aquae adhaeſioni prohibendae aliud in hanc rem libuit inſtituere. Nempe vitrum operuimus ſebi ſtrato ultra ſemilineam craſſo, & nihilominus idem fuit experimenti exitus, ex quo conſtitit novem, & ultra unciarum pondus neceſſarium fuiſſe ad ſuperficies 10. circiter pollicum quadratorum divellendas. Sebum porro omnem aquae ad vitrum adhaeſionem impedire Phyſici conſentiunt, & demonſtrat experimentum, quo tubi capillares intus ſebo inuncti aquam ſupra libellam ſuſpenſam non retinent, obſervante Sigornio, ex quibus conficitur eam methodum a Phyſicis adhibitam, veram adhaeſionis menſuram non praebere.

DE ASCENSU, ET DESCENSU THERMOMETRORUM VARIIS LIQUORIBUS MADENTIUM EX INFLATO VENTO.

THermometra humida, ſi vento ejuſdem temperaturae perflentur, aut ſi ventus ipſe humidus ſit, inſigniter deprimi Muſſchenbroeckius ſcribit (*a*), quod porro phaenomenon cum ſingulare videretur, libuit variis liquoribus rem eamdem tentare. Talis autem fuit experimentorum exitus.

Aqua, vini ſpiritus, acetum, lac, cremor lactis thermometri deſcenſum praeſtabant; petroleum, eſſentia caryophillorum, oleum olivarum, oleum lini adſcenſum efficiebant, ac demum oleum Tartari per deliquium ad aëris temperaturam redactum nihil mutabat, adeout, inflato aëre, thermometrum immobile permaneret. Ut autem certiores fieri poſſemus, num revera ex vento thermometrum adſcenderet, aut deſcenderet, ſi de iis liquoribus quaeſtio erat, qui adſcenſum faciebant, iiſdem frigidioribus utebamur.

(*a*) Eſſai de Phyſique §. 962.

mur, quam eo tempore atmoſphaera eſſet; ſic enim inflato vento prius ad atmoſphaerae calorem aſſurgebat thermometrum, dein flatu continuato majorem altitudinem aſſequebatur, & poſtea in aëre relictum ad atmoſphaerae temperaturam redibat, ac demum ſi in eum liquorem immergeretur, iterum deſcendebat. Contra autem, quando de liquoribus agebatur, qui deſcenſum facerent, eoſdem calidiores parabamus, quam atmoſphaera eſſet, ut pariter venti effectum exploratum, certumque haberemus.

Recenſita porro experimenta nulli hactenus cognitae ignis, caloriſve proprietati accommodari poſſe videntur. Si enim dicas, vi ſalium in aëre contentorum, liquores, quibus thermometra madent, refrigerari, aut incaleſcere, qui vero fit, ut oleum tartari, quod maximam cum acidis per atmoſphaeram diffuſis effervеſcentiam efficere, maximum inde calorem producere deberet, nec minimum pariat caloris, aut frigoris gradum? Sin vero ad attritum confugias aërem inter, & liquores, quibus aſperſa thermometra ſunt, primo quis dixerit ex aquae, & aquoſorum humorum attritu frigus produci? deinde vero hactenus in ea theoria illud firmum, ratumque habitum eſt, quod calor non ſolum attritui reſpondeat, verum etiam liquorum indoli plus, minuſve pinguium, atque adeo magis, minuſve inflammabilium, a qua quidem lege noſtra experimenta longiſſime abſunt. Quid enim macrius oleo tartari? quid vini ſpiritu inflammabilius? quid pinguius lactis cremore? veruntamen oleo tartari nullum frigus gigni, ingens ex vini ſpiritu, & cremore lactis oriri, ipſa experimenta conſtantiſſime docuerunt.

Nobis igitur rem ipſam propoſuiſſe ſuffecerit; rei cauſſam diligentioribus inveſtigandam relinquemus, forte etiam nos ipſi aliquando proponemus; experimenta enim aliqua inchoavimus, quae ſi eumdem eventum conſtanter habeant, ad hanc, aliaſque caloris, frigoriſque cauſſas aſſequendas conducere poſſint.

DE

Digitized by Google

DE CAUSSA EXTINCTIONIS FLAMMAE IN CLAUSO AERE.

1. CUM Eques Salutius definire ſtuderet, num elaſticum fluidum a pulvere pyrio erumpens alendae flammae aptum eſſet; quaeſtio exorta eſt cur clauſo in ſpatio flamma diu vivere nequeat, eaque occaſione variae Phyſicorum de hac re ſententiae in medium prolatae ſunt, ut ſi fieri poſſet, potiſſimam, ac veritati proximam aſſequeremur.

2. Inter caeteras celebris illa adducebatur, qua flammae extinctio vaporibus haeterogeneis tribuitur ab ipſa erumpentibus, quibus incluſus aër abſorbeatur, aut ejus elaſticitas deſtruatur, unde is, qui reſiduus eſt minorem elaſticitatem exerceat, quam ſuſtentanda flamma poſtularet (*a*). Hanc vero non levibus difficultatibus obnoxiam eſſe proponebam, cum vix ad aliquot pollices elevato mercurio clauſo in ſpatio flamma extinguatur (*b*), etſi in montibus, ubi longe rarior aër exiſtit, quam commode vivat; quod ſi a vaporibus, ac fuligine flamma extingueretur alcoholis flammam diutiſſime clauſo in ſpatio victuram eſſe colligebam, cum ab eadem fuligo nulla emanet, nec niſi aquei vapores aliqui erumpant (*c*): quoniam vero diverſus fuit experimenti exitus, & alcoholis flamma citius quam ſebi,

(*a*) L' on ne doit pas attribuer à la perte de l' éſprit vital de l' air l'extinction de la flamme de la chandelle, & des méches ſous des récipiens, mais aux vapeurs fuligineuſes, & acides, dont l' air ſe charge, & qui détruiſant l' elaſticité de cet air, empêchent, & retardent l' action, & le mouvement elaſtique du reſte. Statiq. des vegetaux exp. 117. p. 223.

(*b*) Poſt abſorptam $\frac{1}{37}$ aëris flammam extingui Mayovv, poſt abſorptum $\frac{1}{27}$ Haleſius tradit l. c. exp. 106. p. 200. 201.: imo, ne uno quidem pollice elevato mercurio, flammam extinctam fuiſſe ipſe Haleſius tradit l. c. exp. 125. p. 223. 224.

(*c*) Boerhaav. elem. chem. t. 1. p. 170. 171. edit. pariſ.

Digitized by Google

ſebi, aut pinguis olei extincta eſt, mea exinde magis dubitatio augebatur (*d*).

3. Interea Ludovicus de la Grange experimento alio prioris opinionis infirmitatem evincebat. Accenſam ſcilicet candelam ita vitreae campanae ſuppoſuit, ut campana ipſa ſpatium non clauderet, ſed ejus inferior limbus a tabula, cui candela inſiſtebat, aliquot tranſverſos digitos diſtaret, at flammam non minus perire obſervavit; quanquam ampliſſimus externo aëri ſub campanam aditus pateret, quare nobis etiam apertius perſuadebatur ex defectu aëris, aut ejuſdem abſorptione clauſam flammam non extingui.

4. Cum id Vir induſtrius obſervaſſet, explorare inſuper coepimus, num intra recipiens in ſuprema parte amplo foramine pertuſum flamma vivere poſſet, ſed ſimiliter extingui experti ſumus: Jam igitur binos in ſuprema parte hiatus experiri libuit, quos ſimiliter ſuſtentandae flammae ineptos eſſe comperimus, tum vero obſervavimus foramina non majora flammam ſervare, ſi alterum in ſuprema recipientis parte, alterum in infima pateret, cumque varias apertionum poſitiones, variaſque earundem combinationes Ludovicus de la Grange ſimiliter tentandas propoſuiſſet; ad id Eques Salutius lanternam ex albo ferro conſtruendam curavit, quæ undique accurate clauſa erat; ſed duobus in ſuprema parte foraminibus hiabat, duobus in media, totidem in infima, quorum unumquodque pollicem circiter diametro patebat, & ſubere obturari pro lubitu poterat.

5. Hac uſi, obſervavimus bina oſtia ſuperiora, aut media, aut infima ſuſtentandae flammae non ſufficere, ſufficere au-

(*d*) Deinceps cum Boylei opera pervolverem haec jam olim ab eximio Phyſico animadverſa fuiſſe comperi, qui cum alcoholis flammam clauſo in ſpatio extinctam fuiſſe naraſſet, haec addit *poſt flammae extinctionem aër in recipiente alteratus viſibiliter non fuit, & quantum ex judicandi modis, qui ad manum tunc erant percipere potui, aër, vel omnem ſuam elaſticitatem, vel ſaltem longe maximam ejus partem retinebat*. Vid. ejus ſuſpic. de latent. aëris qualit. tom. 2. p. 8. edit. Genev. 1680.

autem duo alia quaevis, ſi modo eorum unum ſupra flammam, alterum infra ipſam ſitum eſſet; quinimo unicum ad baſim lanternae ſufficere Eques Salutius demonſtravit, ſi ita lanterna agitaretur, ut modo ſuperiora, modo inferiora flamma teneret.

6. Ex quibus experimentis cum conſtare videretur per foramen alterum, & quidem per inferius ingreſſuro aëri, per alterum, & quidem per ſuperius eidem egreſſuro aditum liberum eſſe opportere, ut flamma ſuſtentaretur, eam tamen aëris per foramina directionem levibus corporibus admotis de la Grange tutius, certiuſque definire cupiebat.

7. Id facilius appoſitis valvulis perfici poſſe animadverti, & quidem obſervavimus ex tali valvularum diſpoſitione, ut per ſuperius foramen aër egredi, per inferius ingredi poſſet, flammam vivam manſiſſe, ex oppoſita ipſarum directione interiiſſe, ita ut in primo caſu valvulae a foraminum margine ſponte recederent, in poſtremo contra eundem aptarentur.

8. Quum igitur id conſtitiſſet, per inferius foramen ingredi, per ſuperius egredi aërem debere, ut flammam ſuſtentare poſſit, experiri volui, num tubo curvo communicationem inter ſuperius, inferiuſque foramen perficiente flamma intra clauſum ſpatium ſervari poſſet; ſed nihilo ſecius extingui obſervavi, quam ſi nulla hujuſmodi communicatio interceſſiſſet.

9. Haleſius porro crus alterum ſyphonis per apertum excipuli pneumatici verticem ita trajecit, ut ad lancis fere contactum perveniret, ejuſque cruris orificium tribus laneis tegumentis munivit: candela ſub eo recipiente poſita intra pauca minuta extinguebatur, quanquam tunc temporis Haleſius aërem exhantlando renovaret; nam per lanea ſyphonis tegumenta libere adeo externus aër in exantlati locum penetrabat, ut mercurii altitudo, ne uno quidem pollice augeretur (*e*).

(*e*) Statiq. des vegétaux exp. 115.

Digitized by Google

10. Experimentum hoc, cum de la Grange perpenderet, ideo flammam extinctam fuiſſe opinabatur, quod aër in inferiori tantum recipientis parte renovaretur, dum is, qui in ſuperiori continebatur, immotus remaneret: victuram itaque flammam ſperabat, ſi a ſuperiori recipientis parte aër hauriretur, novuſque aër in ſubducti locum per lancis foramen ingredi poſſet, ſic enim talem aëris curſum produci, qualis a flamma libero in aëre excitari ſolet (7).

11. Aptabat itaque ad lancis foramen, quod in antliam patet tubum ejus longitudinis, ut ad ſuperiorem recipientis partem perveniret, & flammam ita ſub recipiens collocabat, ut foramen aliud lancis, per quod barometrum traduci ſolet, intra recipientis ejuſdem ambitum comprehenderetur, & externo aëri in recipiens aditum praeberet: his ita paratis, etiamſi epiſtomium machinae pneumaticae apertum eſſet, & binis foraminibus, ſuperiori altero, altero inferiori cum externo aëre recipiens communicaret, candela brevi extinguebatur.

12. Quod ſi aërem ex ſuprema parte per tubum hauriret, novuſque interim aër per lancis foramen in inferiorem penetraret, flamma ſervabatur, & tandiu quidem, quamdiu emboli motus perſeverabat, ex quibus conſtitit foramina, quae ſervandae flammae inepta ſint (11), ſervare utique poſſe, ſi curſus aëris ab inferiori ad ſuperius foramen ex arte producatur.

13. Quandoquidem, ut dictum eſt, (8) tubus, qui communicationem inter ſuperius, inferiuſque foramen efficiebat, flammam non ſervaverat, conjecturam fecit de la Grange intra vas clauſum aëris circulum ſponte perfici non poſſe, qui ſi ex arte excitaretur; fortaſſe non aliter flammam, quam in praecedenti experimento ſuſtentaret. Ut id experimento decerneret curvum vitreum tubum ex eo foramine, quo antlia pneumatica cum externo aëre commercium habet ad ſupremam apertam recipientis pneumatici

 par-

Digitized by Google

partem deduxit, accurateque glutinavit, & accenſam candelam ſub recipiente incluſit, cumque mox extinctioni proxima eſſet, embolum agitavit, epiſtomium ita verſando, ut educto embolo aërem per tubum ex ſuprema recipientis parte exugeret, eodemque reſtituto per lancis foramen in inferiorem urgeret: tum vero obſervavimus ſingulis emboli agitationibus refocillari flammam, ſenſimque haud minus vividam reddi, quam in aperto aëre futura fuiſſet; ac talem tandiu ſervari, quamdiu motus emboli perduraret, eodem ceſſante paullàtim languere, iterumque extinctioni proximam eadem arte reſtauravi; haſque languoris, vigoriſque viciſſitudines induci pro lubitu poſſe; quod ſi emboli motus per aliquot ſecunda deficeret, extinguebatur. In hoc autem experimento tentando, prius embolum agitari oportebat, quam omnia accurate glutinata eſſent, ne praepropere flamma interiret, & barometrum aptare negleximus, quod nos certiores redderet, num omnis externo aëri aditus intercluſus eſſet, ſed rei novitate, & elegantia delectati, ſtatim de commodiori experimenti ſpecie cogitavimus, quae vitae uſibus inſerviret.

14. Id autem obtineri poſſe animadvertimus, ſi recipiens undique accuratiſſime clauſum foramine uno in ſuprema parte, altero in infima pertunderetur, hiſque valvulae ea lege aptarentur, ut ſuperior erumpenti aëri cederet, irruenti reſiſteret, inferior viciſſim in recipiens aditum praeberet, regreſſum interciperet, quibus ita comparatis per curvum canalem ad recipiens ferruminatum communicatio induceretur inter utrumque foramen, ipſoque demum pertuſo canali, ad aperturam follis tubus accommodaretur; ſic enim dilatato folle aërem ex ſuperiori recipientis parte tantum hauriri, eodem compreſſo in inferiorem ejuſdem partem urgeri, talemque aëris circulum produci, qualem clauſo in ſpatio flamma ſuſtentanda poſtulabat (13).

Digitized by Google

experimento erant perficiendae, commodiorem apparatum Eques Salutius exhibuit: binos ſcilicet tubos vitreos binis machinae pneumaticae foraminibus, per quorum alterum aër hauriri, per alterum expelli ſolet, firmiter glutinavit, qui quidem tubi ab illis foraminibus diſcendentes, ita protendebantur, ut ad vas aquam continens pervenirent, ibi flexi normaliter erigebantur; ita ut alterum aliquot tranſverſos digitos ſupra aquae ſuperficiem aperiretur, alterum multo altius deſineret: tuborum aperturae conis cartaceis tegebantur, ut aëris introëuntis, aut prodeuntis impetus frangeretur, ex quo vicina flamma extingui potuiſſet: deinde inter binos tuborum ramos in eodem vaſe accenſa candela collocabatur, cujus flamma altero tubo depreſſior, altero elatior erat, & medium fere inter ipſorum altitudinem locum tenebat: poſtremo tubi aqua immerſi, & candela ſimul, campana vitrea tegebantur, cujus limbus aliquot tranſverſos digitos infra aquae ſuperficiem demergebatur, eoque pacto aqua omnem externo aëri in campanam aditum intercludebat. Agitato autem embolo, ut per altioris tubi oſtium aër exſugeretur, & mox per inferioris orificium iterum propelleretur, alterne aqua intra campanam aſcendebat, ac deſcendebat, qui quidem aquae alterni motus externum aërem excludi ſignificabant; at vero depraehendimus candelam ex tali aëris ab inferioribus ad ſuperiora circuitu, ſervari non potuiſſe, & ex contraria aëris directione non magis ſuſtentari; quin imo ejus vita ex hujuſmodi aëris circuitibus, non magis durare viſa eſt, quam ſi aërem immotum relinqueremus: quando autem aquae copia minor in vaſe erat, adeo ut educto embolo trans ipſam bullarum ſpecie externus aër in campanam inſinuari, & eodem reſtituto eadem via expelli poſſet, tunc utique flammam ſervari obſervavimus, ex quibus intelleximus in machina ſuperius deſcripta (15), non certa aëris directione, ſed ejuſdem renovatione flammam ſuſtentatam fuiſſe

(c);

(*e*); ex aperturis citra vitrum aeque periiſſe (16), non quod externus aër admitteretur, ſed quod directe nimis aëris unda in flammam irrueret.

22. Neque vero difficile eſt intelligere, cur per bina foramina, quae verticalia non ſint, aut in apparatu §. 11., & 18., aut demum in noſtra machina, aër ſponte non renovaretur; nam aër ex flamma rarefactus, ac ſpecifice levior a graviori aëre circumpoſito ad ſuperiora impellitur, nec niſi ea directione e lanterna prodire poteſt; ut autem expellatur neceſſe eſt externum aërem, & quidem per inferius foramen, eidem ſuccedere; nam ſi externo aëri per ſuperiora tantum foramina aditus pateat, is ſuo niſu rarefactum aërem, qui contraria directione prodire conatur, intra lanternam coërcebit, niſi tanta fuerit ſuperiorum foraminum amplitudo, ut ingreſſuro, & egreſſuro aëri eodem tempore tranſmittendo ſufficiant, quo in caſu per ea ſola foramina aër renovari poterit, & flamma ſervari: & hanc quidem theoriam experimento alio de la Grange confirmat (4); nam lanternae oſtio inferiori patente, ad oſtium ſuperius tubum curvum accommodat, qui ſi ſurſum vergit, flammam ſervat, ſi deorſum, eandem ſuffocat, quod ſcilicet ſurſum vergens, aëri rarefacto, & ad ſuperiora tendenti aditum praebeat, deorſum directus, aëris rarefacti directioni opponatur, eundemque intra lanternam coërceat. Ex his etiam deducitur, in experimento Equitis Salutii, unico foramine flammam vixiſſe, non quod foramen ſuperiora modo, modo inferiora teneret (5), ſed quod ex agitatione per unicum etiam foramen aër renovaretur, qui, lanterna quieſcente, renovari non potuiſſet.

23. Id igitur commodi habet propoſita machina, ut aërem renovet, quando ſponte non renovaretur, adeoque iis in locis flammae ſuſtentandae inſervire poterit, ubi ob loci figu-

(*e*) Jam aliqua talis machinae ſpecies apud Boyleum extabat (nov. exper. de relat. inter flammam, & aërem exp. 4. p. 21.), qui folli communi, & in poſteriori parte aperto ad renovandum aërem utebatur.

figuram aër circa flammam ſponte renovari non poteſt, quae ob eam cauſſam cito ſuffocatur. Quum vero ea renovatio per quaevis minima foramina eo pacto perfici poſſit, per quae ignis ſcintillae tranſmitti nequeunt, machinam eandem utilem eſſe poſſe cenſemus, ſi quando nocturno tempore pulvis pyrius conficiendus, aut aliquo modo pertractandus ſit, cum omni incendii periculo vacet: in ea autem machina valvulas ſupervacaneas fuiſſe poſteriora experimenta (18, & ſeq.) demonſtrarunt. Et priorem quidem theoriam (15, 16) minus accuratis experimentis (13) innixam miſſam feciſſemus, niſi ejus fama evulgata fuiſſet. Noſtrum igitur eſſe duximus magnorum virorum exemplo candide rem totam profiteri, eoque libentius id fecimus, ut oſtenderemus Cl. Viris, quorum ſententias alicubi minus probavimus, nos non contradicendi ſtudio, ſed veritatis amore in id adductos fuiſſe, cum eandem nos in emendandis opinionibus noſtris ſeveritatem, quam in aliorum ſententiis perpendendis adhibuerimus.

24 Poſtquam ſolum aëris circuitum flammae ſervandae ineptum eſſe comperimus, tela lanea oleo tartari imbuta tuborum orificium Eques Salutius munivit, ut aër per illam trajectus a vaporibus expurgari poſſet; Haleſii, ut ita dicam, conjectura excitatus (ſ), veruntamen flamma cito interibat. His non contentus ſuperius aperti recipientis oſtium ampullae ventre replevit, & commiſſuras glutinavit, venter autem ex contenta aqua frigidus ſervabatur, eoque artificio aërem a flamma ſub recipiente poſita rarefactum, & admixtos vapores refrigerare, ac condenſare contendebat, ut flammae vita produceretur; ſiquidem ex nimia ambientis aëris rarefactione, aut admixtis vaporibus interiret: ſed hoc tentamen non minus inutile fuit, quam praecedens, idemque fuit eventus, quando *refrigeratorium*,

E &

(ſ) Exp. 117. p. 232. 233.

Digitized by Google

& filtrationem ſimul adhibuit, cum inde flammae duratio ſenſibiliter producta non fuerit.

25. Tum ego non per telam tantum liquore imbutam, ſed per craſſum diverſorum liquorum ſtratum aërem flammae circumpoſitum crebro trajiciendum ſuaſi, cum ſuperioris experimenti (23, 24) apparatus opportunus eſſet, dummodo brevior alterius tubi ramus, per quem aër in recipiens reſtituitur, ad liquoris fere libellam frangeretur. Ita enim exhantlato aëre ex altiori ramo, ſicque elevato liquore, brevioris rami aperturam liquore ipſo tegi oportebat, & propterea aër per eam aperturam impulſus, in recipiens penetrare non potuiſſet, niſi per ſuperpoſitum liquoris ſtratum bullarum ſpecie permearet, qua trajectione non modo a vaporibus expurgari, ſed & refrigerari, ac condenſari debuiſſet: ad praeveniendam vero liquoris in breviorem immerſum tubum, indeque in antliam pneumaticam irruptionem. Eques Salutius ipſum non recta ex antlia in vas aquam continens deduci, ſed in arcum flecti curaverat, qui continuus non erat, ſed in ſuprema parte interpoſita phiala vitrea interruptus, ut in ipſam abſorptus liquor proprio pondere deponeretur. His ita paratis aërem per aquam, per oleum, per nitri ſolutionem, per fortem ſolutionem ſalis tartari ſucceſſive trajecimus, ſed flammae recipienti incluſae vita haud ſenſibiliter inde protracta fuit.

26. Quoniam igitur conſtiterat non fumo, aut aquoſis vaporibus (1, 24, 25), non abſorpto aëri, aut deſtructae ejuſdem elaſticitati (3, 4), non ipſius rarefactioni, propter quam ad flammam circa elycnium coërcendam ineptus evadat (24, 25), flammae extinctionem clauſo in ſpatio tribuendam eſſe, unica ſupererat hypotheſis a Phyſicis propoſita, quod ſcilicet flammae nutrimentum clauſo in aëre contentum a flamma brevi abſumatur (g), & id quidem nutrimen-

(g) Quae Boylei conjectura eſt in ſuſpic. de latent. aër. qualit. p. 8., & Muſſcenb. Eſſai de Phyſiq. §. 999., & Laghii Commen. Bonon. t. 4. pag. 88.

mentum a nitroſis ſalibus per aërem diffuſis in primis ortum ducat: quae hypotheſis aliquam veri ſpeciem praeſeferre videbatur, tum ex eo, quod caeteras reijciendas eſſe experimenta demonſtraverant, tum quod pinguia corpora nitrata, ut pulvis pyrius, vel in vacuo boyleano flammam concipiant; ſperabam igitur candelam diutius intra clauſum ſpatium victuram, ſi nitro pulverato elycnium, & ſebum inſpergerentur, ſed aeque cito extincta eſt. Eques vero Salutius rem eandem aliter tentavit. Nam campanae, qua flamma tegebatur, limbum, in nitri ſpiritum fumantem immerſit, ut inde erumpentes nitroſi ſpiritus per campanam diſperſi flammam circumdarent, ſed ſimiliter flammam perire obſervavit, ac ſi aqua, vel liquor alius loco nitroſi ſpiritus campanae limbum obtegiſſet. Hypotheſim itaque conſumti pabuli perinde ac caeteras experientia edocti deſerendam eſſe intelleximus.

27. Id nihilominus certum permanere videbatur aërem clauſo in ſpatio ab incluſa flamma vitiari, cum eamdem diutius alere nequaquam poſſet; etſi quale hujuſmodi vitium eſſet, detegi nondum potuiſſet: quapropter experiri volui, num aër, in quo flamma ſponte extincta fuerat, alteram flammam injectam ſuffocaret; proinde ſub campanam vitream diſpoſitam ut §. 3. accenſam candelam per inferiorem aperturam inſinuabam, & poſtquam ſponte extincta fuerat, accenſam aliam per eandem aperturam immittebam: temporis momento ſuffocabatur, imo poſt aliquot minuta accenſa candela immiſſa ſimiliter peribat, ex quo confirmatur per unicam etiam amplam campanae aperturam aërem ſponte non renovari (23); idque in cauſſa eſſe cur intra ipſum flamma diu vivere non poſſit.

28. Cum itaque aërem flamma ita perverti obſervarem, ut poſt aliquot minuta temporis eandem indolem retineret flammae exitialem, inquirere praeterea conſtitui, an non longiori temporis intervallo, refrigerato aëre, & flam-

mae vaporibus ad latera excipuli ſubſidentibus, priſtinam ſalubremque naturam aër ille recuperaret: quoniam vero aër intra campanam relictus, quae inferiore parte patebat (§. praec.), leviori quacunque vicinorum corporum agitatione ſenſim ſenſimque renovari potuiſſet, idcirco malui ſupra lancem metallicam duobus rotundis foraminibus perviam campanam eandem glutinare. Per alterum foraminum in lance patentium ſipho vitreus mercurium continens traductus fuerat, & cera firmatus, per alterum accenſa candela in recipiens inſinuari poterat, & interim mollis cera, cui candela inſiſtebat, foramen illud obturabat. Extincta itaque candela vidimus mercurium in ſiphone contentum adſcendiſſe, ob condenſationem ſcilicet aëris, qui a flamma fuerat rarefactus, forte etiam ob ejuſdem abſorptionem, & mercurii ſupra libellam ſuſpenſio per tredecim, & ultra horas perduravit, quod nos certiores fecit toto eo tempore exteriori aëri in recipiens aditum denegatum fuiſſe, proinde aërem renovari non potuiſſe. Eo tranſacto tempore, imo & multo antea recipientis cavitas limpida facta fuerat, & ad latera vitri ros fuerat depoſitus ex fumis, vaporibuſque extinctae candelae in liquorem condenſatis. Tum igitur candelam prius extinctam, quae obturaculi inſtar erat, leniter eduxi, ne aër recipiente contentus commoveretur, & accenſam aliam per id foramen in recipiens inſinuavi. Vix flamma intra recipiens penetraverat, cum repente extinguebatur, perinde ac ſi in aquam immergeretur (*h*). Quod cum oſtenderet aërem flamma vitiatum diu id vitium retinere, confirmare videbatur ejuſmodi vitium, neque calori,

(*h*) Haleſius accenſam candelam ſub recipiente poſitam, in quo alia mox extincta fuerat, non ſtatim ſuffocari obſervavit, ſed $\frac{1}{5}$ temporis perdurare, quo prior candela vixerat (pag. 202.). Veruntamen id eveniſſe videtur, quod Auctor recipiens e loco movere, & ab aqua, in quam immerſum erat, eximere debuerit, ut accenſam candelam illi ſubſtitueret, quae mox fuerat extincta, illiſque commotionibus recipientis aërem ex parte ita renovaverit, ut flamma aliquamdiu vivere potuerit.

lori, qui jam dudum diſſipatus fuerat, neque vaporum mixtioni, qui condenſati ſubſederant, eſſe adſcribendum.

29. Poſtquam comperiſſem, aërem per flammam traductum, flammae alendae imparem effici, in lanterna, quam deſcripſi §. 4., duo tantum verticalia foramina aperta relinquebam, & accenſa candela intra ipſam incluſa, ſuperiori foramini flammam admovebam; extinguebatur. Aër ſcilicet ab inferiori foramine ad ſuperius movetur (7); propterea flamma ſuperiori foramini admota aërem recipit per flammam lanternae trajectum, qui prava ſua qualitate eandem ſuffocat (§. praec.).

30. Quod ſi inferiori foramini flammam admoverem, candela lanternae incluſa extinguebatur; quod nempe aër per inferius foramen in lanternam penetrans (7), per admotam flammam traijci cogeretur, a qua ita mutabatur, ut lanternae flammam ſervare non poſſet; extinguebatur autem ſive adpoſita candela ex ſebo eſſet, lanternae vero incluſa ex cera, ſive contra; ſive utraque ex ſebo eſſet, ſive utraque ex cera, ſive aequales, & aequali elycnio praeditae eſſent, ſive alterutra major, majorique elycnio praedita eſſet. Quapropter cum nec alimenti qualitas, nec elycnii magnitudo experimenti exitum immutaverit, videtur aërem per flammam unam trajectum alteri cuicumque alendae aeque ineptum evadere.

31. Quum autem animadverterem, non flammam ſolum, ſed & accenſos carbones (*i*) clauſo in ſpatio ſuffocari, utriuſque phaenomeni eandem cauſſam eſſe ratus, ad inferius lanternae foramen ardentem prunam ita admovebam, ut ab ipſo foramine non nihil diſtaret, & liberum aëri intra lanternam aditum relinqueret; flamma tamen lanternae incluſa ſuffocabatur; quod ſi prunam lanternae incluſerem, & ad ſuperius lanternae oſtium flammam admoverem, haec protinus extinguebatur.

32.

(*i*) Muſſchenb. Eſſai de Phyſiq. §. 994.

Digitized by Google

32. Hauksbejus porro fuerat expertus, aërem per candentia metalla trajectum, & intra recipiens collectum, flammae exitiale fuiſſe. Hac autem methodo praeſtantiſſimus Phyſicus uſus eſt (*K*). Recipiens amplum ſelegit in ſuperiori parte apertum, cujus apertura lamina cuprea, & interpoſito molli corio, accurate claudebatur; ex parvo foramine in lamina cuprea aperto tubus erigebatur auricalceus, clavi verſatili munitus, ut communicatio inter recipiens, & tubum pró opportunitate induci, vel tolli poſſet: tubi extremitas oppoſita in cavitatem craſſae mollis cupri inſinuabatur, ita tamen, ut inter tubum, & illius maſſae cavitatem aër penetrare poſſet; recipiens aëre exhauriebatur: metallica maſſa interim prunis immerſa candebat: clavis aperiebatur: aër in cavum recipiens penetrans per ardens metallum tranſire cogebatur, a quo ita vitiabatur, ut ablata lamina cuprea tegente flamma in ipſum immerſa protinus extingueretur. Quod experimentum cum perpendiſſem, metalla candentia non aliter aërem vitiaſſe arbitrabar, quam a flamma, aut accenſo carbone noſtris in experimentis vitiatus fuiſſet. Igitur, & inferiori lanternae foramini candens ferrum admovi, ut aër per id foramen irruens ferrum in tranſitu lamberet. Obſervavi autem ex ipſo ferro lanternae flammam ſimiliter interiiſſe.

33. Jam vero, ſi ex vaporum e flamma exhalantium mixtione aër vitiaretur, profecto tot, ac tam diverſae ſubſtantiae, quibus flamma ali poteſt, & quae tot diverſos halitus emittunt, unum eundemque effectum non praeſtarent: at demonſtravimus non flammas ſolum diverſas, & vario pabulo altas, ſed & carbones accenſos, imo & candentia metalla proximum, & circumfluentem aërem ita mutare, ut alendae flammae impar evadat. Quapropter calore potius, qui idem eſt in omnibus hiſce corporibus, nec niſi

gradu

(*K*) Saggio delle tranſaz. filoſof. del Sig. Derham t. 3. p. 124.

gradu in ſingulis differre poteſt, quam exhalantibus effluviis, quae mirum in modum in ſingulis diſcrepant, aërem vitiari arbitrabar, eoque magis quod nec condenſatione, nec filtratione, nec ullo alio artificio (24, 25), id aëris vitium emendari, aut imminui potuerit.

34. Obſervaverat porro idem Cl. Auctor, aërem per tubos vitreos candentes trajectum non ſimiliter vitiari: quum vero mea experiundi methodo hujuſmodi tentamina facile perficerentur, libuit & hoc ipſum explorare. Itaque vitri ſolidi maſſam in rudem quandam annuli formam effictam, & extremitati tubi vitrei annexam in ignem injeci, ibidemque retinui donec candeſceret: tum vix ab igne eductam proximae lanternae inferiori foramini admovi, ut aër per candentem annulum tranſire cogeretur: flamma nihilo minus, quam ex candente ferro extincta eſt. Dedimus porro operam in hiſce experimentis, ne candente metallo, aut carbone, aut vitro foramen inferius clauderemus, ſed ad latus foraminis ita aptabamus, ut influentis aëris tranſitum nullo pacto impedirent, adeo ut ſi frigida eodem ſitu aptarentur, nullum incluſae flammae detrimentum afferrent: imo obſervavimus, trajecto per ea candentia corpora aëre, citius, quam eodem intercepto, flammam ſuffocatam fuiſſe. Haec autem experimenta, cum facilia ſint, poterunt qui rebus hiſce delectantur ſuis ipſi oculis eorum veritatem confirmare: id tantummodo caveant velim, ne vitrum nimis tenue ſit, aut non ſatis candens, neve tardius admoveatur; vitrum enim cito calorem amittit, eoque citius, quo tenuius fuerit: unde aëri pervertendo ineptum evadit, quemadmodum experiundo deprehendimus.

35. Quoniam autem vitrum candens effluvia in aërem emittere, aut ex aëre nutrimentum haurire vix veroſimile videtur, ſi ejuſdem fixitatem, & immutabilitatem in igne attendamus, in ea opinione confirmabar, calore potius, quam abſorptis, aut emiſſis particulis aërem labefactaſſe.

Digitized by Google

36. Sed quae tandem hujuſmodi mutatio eſt ab igne inducta, propter quam aër eidem diutius alendo ineptus fiat? rarefactionem non eſſe, aut mutatam aliam ſenſibilem qualitatem, tum vitii conſtantia oſtendere videbatur (17), tum Hauksbei teſtimonium, qui in aëre per candentia metalla trajecto nullam ſenſibilium ejuſdem qualitatum mutatam, conſulto inſtitutis experimentis, ſe deprehendiſſe (*l*) teſtatur; tum demum Greenwoodii tentamina, qui aërem putei, in quem demerſa candela extinguebatur, in ſenſibilibus ſuis qualitatibus mutatum minime fuiſſe comperit (*m*). Nihilominus cupiebam aërem, qui per flammam, aut prunam, aut ardens vitrum trajiciebatur, prius per aquam frigidam trajectum refrigerari, antequam ad flammam alendam perveniret, ut rarefactionis ſuſpicio omnis tolleretur. Ad id Eques Salutius per foramen poculi ad fundum pertuſi tubum vitreum trajecit, & ita glutinavit, ut poculum infuſam aquam contineret, poſtea ſuperius tubi extremum in inferius lanternae foramen immiſſum ſimiliter glutinavit, ac demum ad inferiorem aperturam, flammam, prunam, candenſque vitrum identidem admovimus, & flammam lanternae incluſam non minus perire obſervavimus, ac quando haec ad lanternae foramen immediate admovebantur. Quamquam vero aërem trajectum per tubi portionem aquae immerſam refrigerari, ac condenſari omnino debuerat; ipſum tamen Hauksbei experimentum renovare conſtitui, ut de aëris condenſatione eo tutior eſſe poſſem; ſed tubi ardentes, ex impetu irruentis aëris conſtringebantur: ſi vero candens vitrum ad foramen admoveretur, per quod aër in recipiens vacuum penetrare debebat, cito adeo refrigerabatur, ut aër ſufficientem caloris gradum experiri non poſſet, ex eo vel maxime, quod tanta celeritate aër in vacuum recipiens irruat, & tanta proinde celeritate per can-

(*l*) Loc. cit.
(*m*) Lib. mox cit. tom. 5. p. 10. 11.

candens vitrum trajiciatur, ut ſufficientem ex ipſius calore mutationem neutiquam pati videatur: idcirco eam methodum deſeruimus, eoque libentius, quod ſimpliciorem, commodioremque Eques Salutius propoſuiſſet, ut ſcilicet phiala vitrea, longo collo inſtructa, nudo igni immediate exponeretur. Collo veſicam flacidam circumligavimus, ut aër, qui vi ignis rarefactus e phiala erumpebat, eadem excipi poſſet; & poſtea frigore condenſatus ex veſica in phialam iterum pelleretur preſſione externi aëris, qui eo pacto ab ejuſdem cavo arcebatur. Experimentum ſcilicet expectationi reſpondit. Nam phiala tamdiu in igne relicta, donec candeſceret, veſica intumuit, poſtmodum, phiala ab igne remota, & refrigerata, priſtinam flaceſcentiam veſica adepta eſt, fractoque demum inverſae phialae collo, & immiſſa in ejus cavum ardente flamma, protinus extingui obſervavimus, perinde ac ſi aër alia flamma corruptus fuiſſet.

37. Cum vero id experimentum demonſtraſſet caloris vi talem in minimis particulis aërem componentibus mutationem induci, ut igni ſuſtentando ineptus evaderet; ſperare coepi, frigore, quod contrariam mutationem induceret, quaecunque demum ea mutatio eſſet, priſtinam aëris conſtitutionem reſtitui poſſe: et experimentum quidem ſpem haud fruſtra conceptam fuiſſe comprobavit; cum enim candelam accenſam per vitreae lagenae breve collum in ipſius cavitatem inſinuaſſem, & accuratiſſime molli cera colli orificium obturaviſſem, flammam ſponte extingui ſinebam, ut aër lagena incluſus corrumperetur: deinde, circumpoſita glacie, lagenam refrigerari curabam, & per duodecim quidem horas in eodem frigoris gradu detineri; poſtea, lagena e glacie educta, expectabam, donec ad cubiculi temperaturam ejus calor reſtitutus eſſet; & inverſa demum lagena, ac reſerato collo, accenſam candelam in lagenae ventrem intromittebam: flamma aliquandiu viva ſervabatur; idque experimentum aliquoties eodem eventu interavimus. Quando

Digitized by Google

vero per duas, treſve horas duntaxat intra glaciem lagena detenta fuerat, priſtinam indolem flammae exitialem contentus aër retinebat: ex quibus intelleximus frigus, & quidem diuturnum requiri ad pravam aëris indolem corrigendam, quae ex ingenti calore orta ſit.

38. Idem experimentum etiam in aëre ex ignis exteriori actione corrupto Eques Salutius tentavit: ſcilicet lagenam veſica obturatam, quemadmodum §. praec. deſcripſimus, & ab igne paullo ante eductam in comminutam glaciem immerſit, ibique per plures horas detinuit, ac ſimilem effectum aſſecutus eſt; ut ſcilicet immiſſa in inverſae, & reſeratae lagenae cavitatem flamma, viva ſervaretur. Quae quidem experimenta, quanquam haud facile in praxim traduci poſſint ad flammae vitam clauſo in ſpatio protrahendam; novam tamen lucem in phyſicam quaeſtionem hactenus obſcuriſſimam afferre videntur, eaque de cauſſa Phyſicis haud ingrata futura eſſe ſperamus.

39. Adhuc de poſtremo experimento (37) dubitatio aliqua mihi ſupererat (jamdiu enim vel noſtro periculo didiceram, quanta in experimentis cautela adhibenda ſit), quippe etſi cera, lagenae, quae in glaciem immerſa fuerat, óſtium, qua fieri potuerat accuratione obturaſſem, nullum argumentum ſuppetebat, quo certus eſſem obturaculum omnem externo aëri aditum prohibuiſſe, in primis quando glaciei frigore, condenſato interno aëre, externus in recipiens irruére conabatur. Ut ergo mea haec dubitatio ſolveretur, vas vitreum propemodum cylindricum elegi, quod undique clauſum erat, ſed prope ſummitatem binos tubos continuos habebat, qui in ipſius cavitatem hiabant: tuborum alteri ſipho vitreus mercurium continens conglutinatus eſt, per alterum accenſa parva cerea candela in cylindri cavitatem immiſſa fuit, & interim molli cera, cui candela inſiſtebat, tubum ipſum accurate obturavimus. Flamma per 25." aut 30." perduravit: poſt quam vero extincta eſt, mercurium in ad-

adnexo ſiphonis crure uno circiter pollice ſupra libellam elevatum fuiſſe vidimus, ſive id ex aëris prius a flammae calore rarefacti condenſatione, ſive ex aliqua etiam ipſius aëris abſorptione oriretur: quando vero vas craſſo glaciei ſtrato undique fere circumdatum, & refrigeratum fuit (iis nimirum exceptis locis, ubi cera tubi obturati fuerant, quae ex glaciei, & aquae attactu a vitro ſecedere potuiſſet) mercurium adhuc tribus, quatuorve pollicibus ſupra libellam elevari vidimus, ex aucta ſcilicet interni aëris condenſatione: addita vero pro opportunitate glacie in ejus locum, quae ſolvebatur, & effluebat, vas in eo ſtatu retinuimus per 6. circiter horas, locus autem mercurii in ſiphone, tum ante admotam glaciem, tum poſt ipſam adhibitam filo notatus fuit: poſtremo e glacie vas eduximus, & in cubiculi temperatura diu reliquimus, ſenſimque ad priorem notam mercurium deprimi obſervavimus, non ultra deſcendere, multo minus ad libellam componi. Ex quo conſequebatur nec aëris elaſticitatem ex eo frigore fuiſſe mutatam (cubiculi enim eadem propemodum temperatura erat) nec exteriori aëri in recipiens aditum toto eo tempore patuiſſe. Tum igitur obturaculum, cui extincta candela inſiſtebat, leniter eduxi, & accenſam aliam immiſi, ipſamque vixiſſe obſervavi, & tamdiu vixiſſe, quam cum recenti aëre vas plenum erat, ut aër ille procul dubio, contractum a priori flamma vitium depoſuiſſet.

40. Boerhaavius porro experimenta plura protulit partim ſua, partim ex aliis Auctoribus ſelecta, quibus probavit, corpora ſulphurea incluſa vaſis, in quae aër non admittatur ex igne extrinſecus admoto, quantumvis vehementi nec inflammari, nec in partes reſolvi poſſe. Quae quidem experimenta, cum ad rem noſtram mirifice faciant, huc afferenda eſſe cenſui. Inquit itaque Vir Celeberimus (*n*).

F 2 *Unus*

(*n*) Ch. t. 1. pag. 220.

Digitized by Google

Unus, idemque ignis, applicatus eidem corpori, ſed cum diverſis circumſtantiis, mirifice totam ſuam actionem variat, inprimis quidem pro vario admiſſu aëris ſimul in operatione ipſa. Sumſerat carbonem Hookius, incluſerat pyxidi ferreae carbonem, dein operculo, cochlea accurate facta adacta, vas accuratiſſime occluſerat. Sic commiſerat ingenti igni diu. Neque interim tam violenta actione ignis carbo exuſtus erat, ubi eximebatur poſtea. Vid. vitam ejus in poſthumis pag. XXI. *unde collegerat ſubtilis Philoſophus, aëra eſſe menſtruum, quod agitatum igne, omnia diſſolveret corpora ſulphurea; quum ignis ſine aëre id praeſtare non poſſet: idem in deſtillationibus jam olim Helmontius in carbone ſuo fixo obſervaverat. Et Papinus Recueil des machines pag.* 25. 26.. *Et ſcobem ego lini guajaci ſubtilem, coram vobis, utſi adeo diuturno, adeo violento igne; oſtendi tamen nigerrimam foecem ſuperſtitem retinuiſſe oleum ſibi, nulla ignis potentia ex retorta expellendum. Simulac vero pulverem hunc carbonarium, patina larga exceptum, parva ſcintilla impoſita, examinabam, ſtatim omne nigrum oleum, cum fumo aromatico, cedrino, conſumebatur, & vertebatur ſcobs in cineres incluſos, candidos. Camphoram ſpectate, Auditores. Tota in aëre conſumitur incenſa ſemel, licet aquae innatet. Pone in vaſe vitreo puro, cum alembico impoſito, ſupra ignem, liqueſcit, aſcendit in alembicum, concreſcit in novam, eandemque iterum immutatam camphoram, idemque obſervabitur repetenti ſaepius. Nonne ſulphur vaſis clauſis coercitum, ſublimatur centies, ſemper manens ſulphur idem? Si vero inter ſublimandum rimam vas contraxerit, atque liquefactum ſulphur hac rima aëri contiguum evaſerit, flammam capit ſubito, atque ocyſſime in flammam caeruleam; & acidum fumum reſolvitur. Succinum certe in aëre aperto incenſum totum fere deflagrat, flammam, ignemque alit. Idem ſi ſummo egeris, ſed lento gradu aucto igne, ex retorta in excipulum, aquam, ſpiritum, ſalem volatilem acidum, oleum multiplex conficies, facieſque tandem igne maximo, ut tota ſubſtantia*

per

Digitized by Google

per collum retortae tranſcendat, *ut ſaepe quidem praeſtiti*. *Ignis igitur ſine aëre*, *vel cum eodem immoto*, *ſuffocante*, *agens in materiem inflammabilem*, *penitus alia efficit*. Haec cum perpenderem, a ſummi Viri theoria non nihil recedebam; neque enim aëris immobilitas, aut defectus prohibere poſſe videbatur, quominus corpora in clauſo ſpatio accenderentur, cum flamma ex iiſdem orta, & vaſis incluſa, ad tempus aliquod ardere pergat, eoque diutius, quo vaſa ampliora fuerint, donec nempe omnis aër in vaſis contentus flammae calore fuerit corruptus (27, 28): veroſimilius propterea videbatur, exteriorem ignem, interea dum corpora calefacit vaſis contenta, concluſum aërem ita pervertere, ut ipſorum inflammationi inſervire non poſſet (36). Cum vero cogitarem ſpecula cauſtica etiam, quae validiſſima ſunt, calorem omnem in anguſtum ſpatium ita colligere, ut ad paucorum pollicum a foco diſtantiam calor mediocris omnino ſit, (*o*) per ipſa corpora vaſis incluſa calefieri vehementer poſſe conjiciebam, quin ambiens aër ex calore corrumperetur, atque adeo eo pacto, & inflammari, & ex inflammatione in partes reſolvi debere; neque vanam conjecturam fuiſſe experimentum comprobavit: cum enim in amplam lagenam vitream recenti aëre plenam carbonem, ſulphur, camphoram, ſucceſſive immiſiſſem, &, accurate obturato lagenae orificio, contenta corpora foco radiorum ſolarium per cauſticam lentem (*p*) collectorum expoſuiſſem, ex unoquoque horum corporum fumum erumpentem obſervavi, & carbonis ſuperficiem pluribus in locis in cinerem redegi, & ex camphora demum, ac ſulphure veram flammam excitavi, quibus rite perpenſis, extra controverſiam poſitum eſſe videbatur, igne exterius adhi-

(*o*) Calor in diſtantia 5. pol. a foco ſpeculi Vilettiani vix eſt 190. graduum ther. Faranehit. (Boerh. Ch. t. 1. p. 129.) quanto igitur minor erit in eadem diſtantia a foco ſpeculorum, aut lentium multo debiliorum? quanto minor in majoribus ab iiſdem focis diſtantiis?

(*p*) Lens, qua uſus ſum, focum habebat ad diſtantiam ſemipedis circiter, convexo-convexa, erat quinque tranſverſos digitos latitudine aequabat.

adhibito corpora vaſis incluſa inflammari non poſſe, ex eo, quod interea dum corpora ipſa ſuſcepto paullatim calore ad inflammationem diſponuntur, ambiens aër ſimul calefactus vitietur, & alendae flammae impar efficiatur: Et aërem quidem calore corruptum ipſum eſſe, qui ſulphuris inflammationem in vaſis clauſis impediat, confirmat Equitis Salutii experimentum, qui cum ſulphur in phiala anguſti colli contentum, igni impoſitum non inflammari cerneret, mutato ope follis aëre, flammam emiſiſſe obſervavit. Poſtremo pulvis pyrius, qui in corrupto ex calore aëre flammam emittit, is exterius admoto igne etiam accenditur (*q*): in corrupto autem aëre pulverem pyrium flammam emiſiſſe obſervavi, dum in recipiens, in quo paullo ante flamma ſponte extincta fuerat, quemadmodum §. 28. pyrobolum ex eodem confectum, & accenſum immiſi; nam intra id recipiens tamdiu arſit, quamdiu omnis pulvis conſumtus fuiſſet.

41. At Nobilis Boyleus non ſolum corpora vaſis vitreis incluſa, radiis lentis ope collectis, combuſerat; verum etiam paſtillo uſus fuerat ejus naturae, ut ſemel accenſus in libero aëre totus conſumeretur, atque obſervaverat, ubi ſemel paſtillus hujuſmodi vaſi incluſus ope lentis accenſus fuiſſet, eo majorem ipſius quantitatem combuſtam fuiſſe, quo vas amplius eſſet, aut aër denſior (*); adeo ut paſtillus tum demum extinctus fuiſſe videatur, quando ipſius calore omnis aër in eodem vaſe concluſus vitiatus fuerat, & igni communi alendo ineptus evaſerat.

42. Aër porro factitius e corporibus eductus immiſſam flammam ſuffocat, ut Cl. Phyſici obſervarunt (*r*), cujus quidem phenomeni ratio ex noſtris principiis deduci facile poſſe videtur; cum enim calore aër pervertatur, ita ut flam-

(*q*) Inter corpora inflammabilia ea tantum, quae nitrata ſunt in clauſo vaſe flammam concipere poſſe Macherus monet Ch. pratiq. t. 2. cap. 1. prec. 5.
(*r*) Boyle exper. phyſico-mech. cont. 2. artic. 5. expr. 3.
(*) Exper. phyſico-mech. cont. 2. artic. 7. exp. 2. 3.

flammae inſenſus evadat, cumque aër factitius, vel actuali igne educatur, vel efferveſcentia, aut putrefactione, quos motus utroſque ingens caloris gradus comitatur, vel demum e corporibus eruatur, quae ignis, caloriſque actionem paſſa fuerunt, (ſ) patet et ipſum alendae flammae imparem eſſe debere (36).

43. Quod ſi noſtra experimenta cum aliorum experimentis conferre pergamus, videmus Haleſium aërem reſpirando jam ineptum, ſola per telam laneam oleo tartari imbutam filtratione, iterum reſpirationi aptum reddidiſſe (t), cum contra nos aërem ſuſtentandae flammae imparem, ne trajectione quidem per craſſum ejuſdem liquoris ſtratum, ad priſtinam indolem reſtituere poterimus (25), quod ſignificare videtur, aliam cauſſam eſſe interitus animalium in clauſo ſpatio, aliam extinctionis flammae; hanc ex mutatione ab igne inducta oriri, illum ex admixtis haeterogeneis vaporibus, animali exitialibus, qui a filtris retineri poſſint: quae quidem ſententia Boylei experimento confirmari videtur, qui cum accenſam flammam ſimul cum animali intra recipiens clauſiſſet, flammam cito perire obſervavit, & interim animal nullum adhuc moleſtiae indicium praebuiſſe; adeo ut id vitium, quod aërem flammae ſuſtentandae ineptum reddiderat, nullum animali incommodum afferret (u).

44. Equidem inverſam propoſitionem experimento explorans, obſervavi aërem, intra quem animal perierat, ſuſtentandae flammae ineptum fuiſſe; cum enim in recipiente eo modo diſpoſito, quo §. 28. paſſerculus incluſus fuiſſet, & periiſſet ex impedito novi aëris acceſſu, iis ſymptomatibus, quae a Cl. Viris jamdudum adnotata ſunt, obturaculum eduxi, quo lancis foramen obturabatur, &, immerſa

(ſ) Vid. ſuite de recherches ſur le fluid. élaſt. par le Cheval. Saluce.
(t) Statiq. des vegetaux. exp. 116.
(u) Nova experimenta intra aërem, & flammam vitalem animalium exp. 1., & 2. Et Cl. Lagh. Comment. de Acad. Bonon. tom. 4. p. 88. in opuſc., qui tamen obſervat paſſerculi mortem ex flammae vaporibus 36.' celeriorem fuiſſe. ibid. p. 81.

Digitized by Google

merſa accenſa candela in recipientis cavitatem, protinus extingui obſervavi, quod demonſtrat aërem animali alendo ineptum, etiam ineptum fieri alendae flammae; forte quod vitium duplex contrahat ex animalis mora, alterum ab admixtis vaporibus, ex quo animali exitiale fiat, alterum actione pulmonum animalium, quos toties ſubire cogitur, ex quo flammae pernicioſus evadat: et duplex quidem id vitium ineſſe videtur in aëre a carbonibus ardentibus, aut candentibus metallis corrupto (*x*), qui non tantum flammae exitialis eſt, ut aër a flamma alia vitiatus, ſed & ipſis animalibus infeſtus deprehenditur.

45. Illud vero quaeri poſſet, num reſpiratus aër flammae exitialis evadat ex eo tantum, quod pulmonum calorem paſſus ſit; num quod intra pulmonem, aut animale corpus ex alia cauſſa id vitium contraxerit. Nam quod ignis, & calor aërem ſuſtentandae flammae imparem reddat (36), id non prohibet, quominus et aliae cauſſae id ipſum facere poſſint. In Phyſicis enim ita comparatum eſt, ut ſi errores vitare velimus, vix ultra experimenta progredi liceat: veruntamen haud leviter novae cauſſae excogitandae, aut admittendae ſunt, ubi jam certa ſuppetat, cum compendioſa natura, una cauſſa, innumeros, ac mire diverſos effectus producere ſoleat. Sequenti igitur experimento quaeſtionem definiendam ſuſcepi. Ranam poculo vitreo, ſupra lancem metallicam (28) glutinato, incluſam, ſuffocavi: vixit autem per tres ferme dies. Una a morte hora lancis foramen aperui, & per ipſum accenſam candelam in poculi cavitatem immiſi: protinus extincta eſt, non ſecus ac in ſuperiori experimento (44) contigiſſet. Cum vero ranae calor vix ullus ſit, tuto concludi poſſe cenſeo, perverſionem aëris ex ſuffocatis animalibus ortam calori minime tribuendam eſſe, ac proinde non una, ſed pluribus de cauſſis nativam

(*x*) Boyle l. c. exp. 2. Hauksbé l. c.

Digitized by Google

tivam aëris compagem ita vitiari, ut flammae alendae impar evadat: quamobrem nec definire audemus, num ſimile artificialis aëris vitium ſoli calori ſit adſcribendum (42), licet diuturno frigore perinde fuerit emendatum, ac ſi ex calore productum fuiſſet (z).

46. Neque ſolum quando animal demum interiit (44, 45), ſed etiam multo ante aërem flammae infeſtum deprehendi; adeo ut deinceps, non flammam ſolum, ſed et ipſas immiſſas prunas ſtatim ſuffocaret. Quoniam vero aër in quo flamma extincta eſt, prunis non aeque noxius obſervatur, concludendum videtur, prunas, & animalium vitam (43) a leviori vitio, ex brevi flammae calore inducto, minus affici, dum ex graviori ejuſdem ſpeciei vitio, quod aut animalium vita, aut calor diuturnus prunarum induxit, vehementer laedantur. In eam itaque opinionem adductus ſum, ut putem, ab exhalantibus vaporibus utique animalia in clauſo vaſe plurimum laedi, ſed multo magis a vitio, & perverſione ipſius aëris haud abſimili illi, quam diuturnus calor inducere potuiſſet. Profecto, quando experimentum Haleſii (43), quo filtrationis ope, aër reſpirationi diutius aptus ſervatur, ita ab ingenuo Auctore propoſitum video, ut nec ipſe ſatis eidem fidere videatur (a), multo minus vaporibus tribuendum cenſeo, quam principio fueram opinatus (43). Huc accedit quod vitium, quo aër ex ſuffocato animali inficitur, ſimiliter diuturnum eſſe comperio, ac illud, quod ex extincta flamma naſcitur (28). Nam Boyleus aërem, in quo animal ante quatuor horas interierat immiſſo alteri animali, trium minutorum ſpatio, mortem attuliſſe ſcribit (b),

G quo

(z) Vid. ſuite des recherches ſur le fluide élaſt. &c. par le Chev. Saluce.
(a) Mais je ne ſçai, ſi cela ne doit pas être attribué a quelque paſſage inſenſible que l' air avoit pû ſe faire à travers les ligatures, je ne me ſouciai pas même de répéter l'experience, crainte de m'altérer la poitrine en reſpirant ſi ſouvent ces vapeurs nuiſibles. Statiq. des veget. exp. 116.
(b) Exp. phyſico-mechan. cont. 2. artic. 3. exp. 11.

quo certe tempore, animalis prius extincti vapores, qui aquoſae indolis eſſe cenſentur (*c*) condenſari, ac colligi debuiſſent; aërque quoque factitius, undecim diebus, poſtquam e quercu fuerat eductus, vim veneficam retinuerat, qua immiſſum animal cito ſuffocavit (*d*): ex quibus erui poſſe videtur, aërem factitium, aut ex ſuffocatis prunis, aut animalibus depravatum multo gravius labefactari, ideoque non flammae ſolum, ſed & prunis, & animalibus perniciofum eſſe; contra, qui flamma vitiatus fuit, flammae quidem nocere, ſed, cum levius id vitium ſit, quanquam ejuſdem ſpeciei, animalia, aut prunas manifeſte laedere neutiquam poſſe. Caeterum, dum mutatae aëris conſtitutioni animalium in ipſo incluſorum mortem tribuendam eſſe conjicio, minime inficior, collectis quoque vaporibus, animalia ipſa laedi plurimum poſſe; cum tam perſpicua, tam vehemens ſit diverſorum effluviorum actio in nervoſum ſyſtema, ut nonniſi temere in dubium revocari poſſit. Hoc tantum ſuſpicor, vapores ab animalibus emanantes, ipſorum vitae minus, quam mutatam aëris craſim infenſos eſſe. Quid quod flammam, cujus extinctionem in clauſo aëre mutatae aëris conſtitutioni adſcribendam probavimus (361), a quibuſdam tamen odoratis effluviis laedi Laghius teſtatur (*e*)?

47. Sed jam forte nimis conjecturis indulſimus: enim vero nobis viſum eſt, propoſitam quaeſtionem non prius ſolvi poſſe, quam plura in eam rem experimenta tentata fuerint, quorum inſpecto eventu, difficultas tandem omnis evaneſcat. Primo enim definire oporteret, quibuſque varii halitus ex odoriferis corporibus emanantes, & per interclusum aërem diſperſi, flammae in ipſum immerſae nocere poſſint: nocere enim Laghius innuit, quantum vero noceant mi-

(*c*) Haller prim. lin. Phyſiol. §. 498.

(*d*) Hales apud Deſagulierium. Vid. ſag. delle tranſaz. filoſof. tom. 4. pag. 61. Vim vero veneficam aëris artificialis ab aliis corporibus educti demonſtravit Boyle l. c. art. 5.

(*e*) L. c. pag. 85.

„ tinuo aër reverberet ignis particulas, prunaſque adeo ſer„ vat diutius. „ Hactenus Vir Clariſſimus. Quid vero de hiſce ſentiendum videatur ex ſequentibus apparebit.

18. Poſtquam quae tentavimus de flamma experimenta in eum qualemcumque ordinem redegiſſem, quo propoſita leguntur, Eques Salutius nova inſtituere aggreſſus eſt: inveſtigare nimirum voluit num aëris fluxus, qui ab inferiori ad ſupremam clauſi recipientis partem dirigeretur, flammam quoque ſuſtentaret, etſi hujuſmodi directio, directioni, quam aër circa flammam ſponte ſequitur, oppoſita eſſet.

Itaque ſiphones binos ex vitro ſelegit, quorum crus alterum intra clauſum recipiens inſinuavit, dum alterum extra ipſum emergebat: incluſa crura non eandem habebant altitudinem, ſed unum ſupra flammam eminebat, alterum infra ipſam deprimebatur: ex hoc aërem ore exhauriri juſſit, atque ejuſmodi exhauriationibus flammam vivam ſervari obſervavit, quanquam aër ex infimo ſiphone eductus nonniſi ab aëre per ſupremum ſiphonem irruente reparari poſſet, ſicque a ſuperiori ad inferiorem ſiphonem aëris curſus dirigeretur. Ceſſante exſuctione flamma extinguebatur, quemadmodum juxta §. 11. contingere debebat: jam vero binos ſiphones adhibuit, quorum incluſa crura, vel utraque ſupra flammam eminebant, vel utraque eadem depreſſiora exiſtebant, & in utroque caſu, hauſto ex altero ſiphone aëre, flammam vixiſſe deprehendit.

19. Haec autem experimenta eo magis paradoxa nobis videbantur, quod poſtremum Haleſii experimento ſuperius deſcripto (9) oppoſitum eſſet; itaque tum caetera experimenta, tum inprimis hoc ipſum non ſemel, aut iterum, ſed ſaepius omni diligentia, ac ſollicitudine inſtituimus; cumque eventus idem conſtantiſſime ſe proderet, ſuſpicati ſumus Haleſium ampliori, altiorique recipiente uſum fuiſſe, adeo ut fluxus aëris ab uno ad alterum inferiorum foraminum abſolveretur; intereaque aër ſuperior, qui flammam

cir-

circumdaret, immotus remaneret, vel eundem Haleſium ſero nimis embolum agitaſſe, flamma jam languida facta, vel demum majori, minorive, quam par eſſet, celeritate embolum commoviſſe, eo vel maxime, quod ex poſtremis hiſce cauſſis, flammam in noſtris experimentis non ſemel extingui contigiſſet.

20. Neque ſolum alienis experimentis, verum etiam noſtris, & praeconceptae theoriae mox propoſita experimenta adverſari videbantur: nam ex illis conficiebatur, vel qualencumque aëris motum, & agitationem flammae ſervandae aptam eſſe, vel flammae vitam non ab aëris motu, ſed ab ejus renovatione repetendam eſſe. Itaque unum, eundemque incluſum aërem agitare primum coepimus, ut videremus, num agitatio aëris, quae ipſius renovationem nullam producat, flammae ſervandae ſufficeret; ſi enim ſecus contingeret, concludendum erat motum aëris non per ſe ipſum flammam ſervare, ſed quatenus per motum continua aëris mutatio perficeretur: cum vero aëris varia agitatione flamma ſuſtentari non potuiſſet, tunc eo magis dubitavimus, etiam in propoſita machina (15) flammam vixiſſe ob aëris renovationem potius, quam ob ipſius circuitum certa lege, certaque directione excitatum; dilatato enim folle, ſi aliquod vel minimum in machina foramen remaneret, tantum aëris per ipſum in machinae cavitatem penetrare oportebat, quantum aucta erat aperti follis capacitas, eodemque conſtricto, aequalis aëris quantitas per idem foramen iterum erat expellenda, eaque ratione aër renovari potuiſſet.

21. Experimentum quidem in machina pneumatica primum fuerat inſtitutum, ſed cum nullum barometrum fuiſſet appoſitum, quo certi eſſemus externum aërem prohibitum fuiſſe (13), ideo illud experimentum appoſito ſiphone iterandum eſſe cenſuimus; cum vero ea methodus incommoda eſſet ob multiplices juncturas, quae promte pro quovis

expe-

15. Lanterna itaque ex albo ferro expoſita arte conſtructa fuit, quae anteriori in parte plano vitro ad ferrum quam exacte ferruminato, ac glutinato claudebatur, ut ipſius cavitas conſpici poſſet. Lanternae porro fundus rotundo foramine pertuſus erat, quod in tubum aliquot pollices longum ſupra internam fundi faciem normaliter junctum aperiebatur. Tubus alius planae laminae normaliter inſiſtens priori congruebat, & accenſam candelam recipere poterat, ac ſuſtinere: ſuperior autem planae laminae facies molli cera obducebatur, ſic enim tubo hoc in priorem immiſſo, candela in lanternam inſinuabatur, & interea plana baſis ſuperiori facie, qua cera obducta fuerat, contra lanternae fundum compreſſa, eidem adhaerebat, & exterioris aëris ingreſſum prohibebat. Reliqua ſe habebant, ut §. praecedente propoſitum fuerat: duntaxat notandum follis, quo uſi fuimus, poſteriorem aperturam, ſuperpoſito corio, ac rite glutinato obturatam fuiſſe; his ita diſpoſitis experimentum aggreſſi fuimus, quod expectationi noſtrae reſpondit; candelam enim mediocrem, quae intra recipiens ſibi relicta minuto temporis extinguebatur, tamdiu vivam ſervabamus, quamdiu follem agitare lubebat, & intermiſſa paullisper agitatione languidam cernebamus, quae mox, eadem renovata, reſtaurabatur.

16. Etſi vero lanternam accurate clauſam optaremus, talem nihilominus ab artifice non obtinuimus, ſed ſingulis follis agitationibus aëris irruentis, aut prodeuntis ſibilum percipiebamus, inprimiſque circa vitrum, tumque ex follis agitatione flamma vehementer commota extinguebatur, praeſertim ſi paullo celerius follis agitaretur: poſtquam vero pleraſque lanternae juncturas ſuperinducta cera, & maſtice glutinavimus, deſcriptum lanternae effectum demum obtinuimus; quapropter in noſtra opinione fuimus confirmati non ex renovatione, ſed ex circumductione aëris flammam

D 2 ſer-

Digitized by Google

ſervari, ſiquidem quo accuratius novus aër arcebatur, eo magis quieta, & incolumis apparebat.

17. Interim non inopportunum exiſtimamus ea afferre, quae Cl. P. Beccaria in ſuis phyſices lectionibus in hanc rem protulerat, ea autem hujuſmodi ſunt.

„ Primo flammam ex charta excita ſub flamma candelae: „ extinguitur; ea enim aërem disjiciens infra candelae flam- „ mam conſtitutum, facit, ne aëre undique ambiente flam- „ ma candelae libretur, contineatur.

„ 2. Candelam accenſam ſupponito vaſi undique clauſo: „ brevi extinguitur; ſupponito vaſi clauſo undique, quod „ tamen prope fundum communicet cum aëre ambiente: „ extinguitur.

„ 3. Supponito vaſi undique clauſo, praeter quam in „ vertice, ubi foramen hiet pollicare: extinguitur.

„ 4. Supponito vaſi, in quo foramen pollicare duplex, al- „ terum baſi flammae depreſſius, alterum altius: vivet „ flamma, atque non verticali emicabit directione, ſed „ obliqua, apice nimirum ſuo declinabit a loco foraminis „ depreſſioris in locum foraminis altioris patentis in latere „ oppoſito vaſis.

„ Quae omnia non ſolum probant aërem eſſe neceſ- „ ſarium, qui flammam reverberet undique ad flammam „ alendam, ſed plane etiam evincunt aëre opus eſſe, qui „ certa circumeat lege; flamma nimirum ſuo apice immi- „ nentem ſibi aërem perpetuo deturbat, illi aër ſuccedit, „ qui baſi flammae adjacet; novo ergo aëre continenter „ opus, qui adfluat ad baſim, dimotoque ex apice aëri „ ſuccurrat.

„ Ratio ipſa, qua ſervatur ignis in prunis accenſis, vel „ ratio potius, qua fit, ne ignis in prunis accenſis graſſans, „ ipſas velociter exolvat in cineres, eamdem confirmat, „ quam ſuperius conſtitui veritatem; nimirum cineribus „ obvolvuntur accenſae prunae, ea res facit ne recens con-

„ tinuo

minime proponit; deinde opus eſſet Haleſii experimentum (43) commodiori methodo, qua ſuperius uſi fuimus, (25) iterum inſtituere, omniaque ipſius phaenomena, quae ad hanc rem facere poſſent diligenter adnotare: poſtea definire, an vitium, quod ex ſuffocato animali aër contrahit, quodque, non ſecus ac vitium ex flamma natum, diuturnum eſſe innuimus (46), glacie ita emendari poſſit, quemadmodum id, quod ex flamma provenit (37, 38, 39): experimento demum decernere opus eſſet, num aër, qui ignis exterius admoti calorem diu paſſus eſt, poſtea refrigeratus (36) immiſſis animalibus incommodum afferat: experimenta, verbo dicam, omnia in flamma capta, mutato congruenter apparatu, in animalibus inſtituenda eſſent. Quandoquidem vero hujuſmodi experimenta multum operae, & temporis requirerent, quod nobis in praeſentiarum deficit, cum noſter hic liber jam ſub praelo ſit; idcirco in tempus aliud differenda eſſe ſtatuimus.

Digitized by Google

DISSERTATIONES,

ET

OPUSCULA VARIA.

Misc. Taur. Tom. I.

Digitized by Google

Digitized by Google

MÉMOIRE
DU CHEVALIER SALUCE

Sur la nature du fluide Elaſtique qui ſe dévelope de la Poudre à Canon.

LEs ſentimens de ceux qui ont traité de la Poudre à Canon ſont ſi partagés ; leurs raiſonnemens ſont ſi brillants, & paraiſſent ſi bien apuiés ſur le vrai, qu'il n'eſt pas poſſible au prémier coup d'œil de ſe décider ſur l'eſtime qu'on en doit faire. Le plan que je me propoſe de ſuivre dans une matiére auſſi épineuſe, & ſi peu éclaircie, eſt de procéder le plus méthodiquement qu'il me ſera poſſible à un nombre d'expériences déciſives, dont je donnerai une exacte déſcription, après avoir expoſé en racourci le ſentiment de pluſieurs grands Hommes : des reſultats des expériences, je tâcherai de déduire toutes les conſéquences qui dépendent de l'entiére connaiſſance de la nature du fluide, & de la ſoigneuſe obſervation des phénoménes ; c'eſt par la voie d'un enchainement naturel de faits, que je chercherai de ſatisfaire aux doutes qui partagent les Phyſiciens ; je n'entrerai dans aucune queſtion qui ait rapport à la pratique : pluſieurs célébres Auteurs excités par l'importance, & la difficulté du ſujet y ont éxercé leurs talents. On a pû calculer l'action de ce fluide ſans en connaître la nature, & on a tiré de cette Téorie tous les ſecours, dont la pratique avoit beſoin. C'eſt un bonheur pour les hommes qu'ils puiſſent avec la ſeule connaiſſance des effets naturels, en faire des applications heureuſes aux uſages les plus utiles

à la Société avant d'être aſſurés des cauſes qui les produiſent.

I. Les opinions ſur la cauſe de la force, & des effets de la Poudre à Canon, ſe peuvent réduire à deux principales: Mr. le Chevalier Iſaac Nevvton (*a*), qu'on peut conſidérer comme Auteur de la prémiére, penſe que la ſubite & véhémente raréfaction de la matiére qui s'enflame, & s'échaufe très-vivement la convertit en vapeurs, dont l'action violente ſe manifeſte par une exploſion & une force prodigieuſe; car dit-il le charbon & le ſouffre qui s'allument aiſément, mettent en feu le ſalpêtre, dont l'éſprit converti en fumée détonne avec violence. Les vapeurs qui provienent du volatil du ſouffre ne contribuent pas peu à en acraitre la force. Mr. Wolff, & pluſieurs autres Auteurs penſaient de même (*b*).

2. La ſeconde opinion eſt, que, lorſque la Poudre prend feu il ſe dévelope un fluide, dont l'élaſticité était auparavant fixée, & qui gardait la forme d'un corps ſolide.

3. Quoíque ce principe ſoit adopté par pluſieurs illuſtres Auteurs, Mrs. Boyle (*c*), Papin (*d*), Jean Bernoulli (*e*), de la Hire (*f*), Belidor &c., tous ne con-

(*a*) Pulvis tormentarius, quum ignem concipit, abit in fumum flammantem. Carbo nimirum, & ſulphur ignem concipiunt facillime nitrumque accendunt; nitrique ſpiritus inde in vaporem rarefactus, proruit cum exploſione; ſimiliter ac aquae vapor ex aeolipila. Sulphur quoque, ut eſt volatile, convertit ſe itidem in vaporem; id quod exploſionem illam adauget . . . . Exploſio itaque pulveris tormentarii oritur ex celeri ac violenta actione, qua tota permixtio ſubito, & vehementer calefacta, rareſit utique, vel convertit ſe in fumum ſive vaporem: qui denique vapor actionis iſtius violentia eodem tempore candefactus, flammae nimirum ſpeciem exhibet. Quaeſt. x. poſt. opt. pag. 139. 140.

(*b*) Muſch. Phyſ. tom. 1. pag. 432.

(*c*) Op. var. pag. 36.

(*d*) Tranſ. phil.

(*e*) Op. om. tom. 1. Diſs. de efferv. & ferm. pag. 34.

(*f*) Diſs. de l'an. 1702.

Digitized by Google

conviennent pas ſur la nature & ſur la maniére dont ce fluide agit. Quelques uns, comme Mr. Halles (*g*) ont conclus, par la reſſemblance de ce fluide avec celui qu'ils avaient tiré d'autres corps ſolides par la diſtillation, ou autres procédés, qu'il était du véritable air, ſans qu'ils ſe ſoient cependant attachés à en faire une analiſe particuliére, telle, que parait l'éxiger la délicateſſe & l'importance du Sujet.

4. Mr. Muſchembroek (*h*), dont l'habileté dans les expériences eſt univerſellement reconnue, révoque en doute que le fluide élaſtique des corps ſoit du véritable air, & fait pluſieurs objections au ſentiment de Mr. Halles: & il a tâché même par pluſieurs raiſons de démontrer que ce n'était point en effet du véritable air.

5. L'autorité des grands Hommes que je viens de citer, ne ſervant qu'à augmenter mon incertitude ſur la nature de ce fluide, j'ai eu recours, comme je me l'étais propoſé, aux expériences, unique reſſource pour démêler le vrai, & terminer les différens.

6. Je démontre par leur ſecours, en prémier lieu, l'inſufiſance de la prémiére opinion; je fais enſuite une ſcrupuleuſe analiſe du fluide, en obſervant à peu près la méthode qu'a tenu Mr. Halles (*i*) pour en éxaminer d'autres; je réponds en troiſiéme lieu aux objections de Mr. Muſchembroek, en aportant les raiſons que l'expérience m'a fournies.

7. Je me flatte par ce procédé de fournir des nouvelles lumiéres ſur la Téorie Phyſique de la Poudre, & d'avoir par un cours naturel & ſimple donné la ſolution d'autres queſtions, ſçavoir de la maniére, avec laquelle la Poudre prend feu dans le vuide, & des effets qui en réſultent;

En

(*g*) Stat. des veg. trad. par Mr. de Buffon pag. 164. & ſuiv., & 169.
(*h*) Coll. Acad. tom. 1. add. 38.
(*i*) Stat. des veg. pag. 166.

8. En prémier lieu perſonne n' ignore que les vapeurs aqueuſes perdent leur élaſticité, & ſe convertiſſent en eau en refroidiſſant. Je prouverai donc, dans la ſuite, que le fluide élaſtique de la Poudre ne perd que peu de ſon élaſticité, (*) & que par conſéquent il ne ſaurait être produit par des vapeurs aqueuſes.

9. Mr. Halles informé des expériences de Mrs. Boyle, Papin, Bernoulli &c., & connaiſſant (*K*) d' ailleurs la grande quantitè d'air que contient le ſalpêtre, & eu égard aux raiſons ci-devant citées ne balance point à croire que ce ne ſoit du véritable air. Cette conjécture cependant eſt combattue ainſi que je l'ai dit par les raiſons ſuivantes de Mr. Muſchembroek.

I. Que ce fluide n' eſt point propre à la reſpiration;

II. Qu' il n' entretient point le feu.

10. Mr. Halles (*l*) ſoupçonne, que ces effets ſoient produits par le mélange des exhalaiſons ſulfureuſes, puiſqu' il a démontré qu'elles abſorbent l'air, & qu'elles nuiſent à la reſpiration; en preuve de quoi, il compare (*m*) ſes réſultats avec ceux de Mr. Hauksbee: pour m' en convaincre, je n' ai pas héſité de tenter la ſéparation des exhalaiſons ſulfureuſes, & faire enſuite la comparaiſon entre les propriétés du fluide qui en ſerait purgé, & celui qui les contiendrait encore; C' eſt pourquoi j' ai fait les expériences ſuivantes.

11. Prémiérement pour m' aſſurer que ce fluide nuit aux animaux.

EXPE-

(*) J' ai dit que le fluide élaſtique de la Poudre perd un peu de ſon élaſticité, parceque vraiment dans l' expér. que j' en ai fait, il eſt arrivé quelque changement à la hauteur du mercure, j' aurois cependant lieu de douter que l' atmoſphére ait pu y contribuer, c' eſt pourquoi je me reſerve à la répliquer avec plus de diligence.

(*K*) Voïés ſtat. des veg. pag. 159.

(*l*) Ibid. pag. 163.

(*m*) Ibid. pag. 197.

Digitized by Google

EXPERIENCE PREMIERE.

JE mis ſous un récipient [a] en forme de bouteille placé ſur la Pompe Pneumatique, une Caille: de l'embouchure [b] du récipient ſortait un tube de verre, à l'extrémité [c] du quel était un petit flacon où j'avois mis de la Poudre, je lutai fortement toutes les jointures, je pompai enſuite par deux éxantlations une partie de l'air, aprés leſquelles je fis placer un flambeau, dont la flamme répondait éxactement à l'endroit [d] où était la Poudre dans le flacon: je continuai aprés cela à pomper l'air jusqu'à ce que l'animal donna des marques aſſurées qu'il alloit toucher à ſa fin, terme précis où la Poudre devait s'enflammer, & que j'avais trouvé aprés pluſieurs repriſes, en effet elle prit feu, & le fluide paſſant dans le récipient étouffa l'animal; il eſt donc prouvé que le fluide élaſtique de la Poudre eſt pernicieux & mortel. Fig. 1. pl. pr.

12. Les phénoménes que j'ai obſervé dans cette occaſion ſont les ſuivans;

I. Qu'une flamme lente & bleuatre ſe manifeſte lorſque la poudre commence à entrer en fuſion;

II. Que lorſqu'elle s'embraſe totalement elle ne fait point de bruit, & ſe convertit en une nuée opaque.

Les difficultés que j'ai rencontré dans l'éxécution de cette expérience, m'ayant obligé de la repéter bien des fois, j'ai eu occaſion de remarquer les précautions qu'il y faut apporter, je ne parlerai que des principales, pour épargner de peine à ceux qui ſe donneront celle de la répliquer.

I. Le flacon doit être bien ſec, car ſans cela il ſe fend dans le tems que la poudre prend feu; pour remédier à cet inconvénient, j'ai coutume de l'expoſer petit à petit à un feu plus violent; & je l'y tiens pendant long tems, ayant ſoin pour prévenir la fuſion, de le changer de ſituation.

2. La

II. La Poudre doit être pilée finement, parceque la propagation du feu étant interrompue dans le vuide, les grains ainſi diviſés en parties fort petites ſont plus contigus, & le feu s'y met plus aiſément tout à la fois, lorſqu'ils ſont échauffés.

III. La plus grande facilité de s'enflammer que la Poudre pilée a dans l'air libre, & la perte de force qu'elle parait ſouffrir par cette opération, (à ce qu'on peut juger par le faible détonnement qu'elle fait) m'ont déterminé à en mettre une plus grande quantité dans le flacon; en effet l'événement a très-bien confirmé mon attente, & on peut en mettre davantage ſans riſquer de briſer les vaiſſeaux, ce qui eſt d'autant plus utile dans cette expérience, où il faut un aſſés grande quantité de fluide, ſans qu'il ſoit poſſible de faire un grand vuide à cauſe que l'animal périrait.

Cet effet ſurviendrait-il peut-être parceque la viteſſe, avec laquelle l'air recouvre ſon élaſticité trouvant moins de réſiſtance, à cauſe que les parties n'adhérent plus entr'elles par un ſi fort contact, la force en ſerait amoindrie?

13. Cette façon de mettre le feu à la poudre en échauffant le verre me parait la plus propre, & la plus ſimple, outre les avantages qu'elle a d'être plus active, & d'en allumer une plus grande quantité, parce qu'elle peut embraſſer une ſurface plus étendue.

Ce qui n'arrive pas en ſe ſervant d'un miroir, ou d'un verre ardent, puiſque par ce moyen on n'embraſe que les grains, ſur leſquels tombent les rayons, car il faut remarquer ainſi que je l'ai dit en paſſant ſeulement (II.) que la Poudre dans le vuide ne s'embraſe qu'après qu'une forte chaleur l'a mis en fuſion; le miroir, ou verre ardent ne produit cet effet qu'aux peu de grains qu'il affecte; & l'application d'un fer rouge ſous le diſque de la platine de la Pompe, eſt une maniére trop pénible, qui a en

partie

Digitized by Google

partie le déſagrément ci-devant indiqué, & qui plus eſt, elle ne peut convenir dans des expériences auſſi délicates.

14. Par ce qui a été dit on voit clairement en prémier lieu, que, ce n'eſt qu'en vertu de la réſiſtance de l'air extérieur que la Poudre détonne, puiſque dans un air fort rare, l'exploſion ſe fait ſans détonnement.

En ſecond lieu, que l'air qui ſe trouve dans les intervales de la Poudre grainée ſert à la propagation du feu, car l'on ſait, comme je l'ai dit, (13) qu'en ſe ſervant du miroir &c., ou du fer rouge l'ôn ne peut enflammer toute la Poudre, & ſi la communication du feu n'était point interdite l'inflammation de peu de grains devrait ſuffire pour mettre le reſte en feu, & c'eſt auſſi pour cette raiſon que je la fais piler, comme je l'ai fait obſerver, précaut. II.

15. La conjéſture de Mr. Halles ne me paraiſſait pas moins fondée après l'expérience que je venais de faire, & dans l'intention de mettre fin à toute controverſe, je commençai par refléchir ſur la nature de chaque individu, afin de me former du fluide l'idée la plus juſte, & ayant conſidéré que le ſalpêtre contient un alkali fixe & un acide volatil, que le ſouffre eſt compoſé d'un acide, d'une matiére huileuſe & inflammable, que le charbon enfin contient une grande quantité de phlogiſtique; j'imaginai que le fluide ſerait conſtitué par des parties omogénes à celles des ſubſtances primitives, & en conſéquence de ce jugement, je m'attachai à tenter la ſéparation des éxhalaiſons pernicieuſes par une voye chimique.

16. Perſuadé donc que ce fluide contiendrait eſſentiellement des parties acides vitrioliques & nitreuſes, & une grande quantité de matiéres groſſiéres, (15) j'eus recours à une ſubſtance alkaline qui retenant par une grande affinité les prémiéres, interdiraient à l'aide des filtres le paſſage aux autres, & pour m'en convaincre je fis l'expérience ſuivante.

EXPERIENCE SECONDE.

Fig. 1. pl. pr. JE fis à l'apareil de la prémiére expérience la variation ſeule du tube, qui ſert de communication du récipient au flacon : j'en employais un fait en pluſieurs piéces (*r r r r*) qui entraient l'une dans l'autre : chacune de celles, qui s'emboitaient avoit un double filtre de gaze bien enduit d'huile, ou de ſel tartre ; celui qui entrait dans le récipient était ou triple, ou bien d'une toile plus ſerrée. Les jonctions furent ſoigneuſement lutées, & je procédai enſuite de la même maniére, que dans la prémiére expérience. La Caille par ſon abatement & ſes contorſions, ménaçait une fin prochaine. Le baromêtre était à 20. pouces environ, lorſque la poudre s'alluma ; l'animal auſſitôt prit ſenſiblement de nouvelles forces, loin de démeurer couché ſur ſon ventre les yeux mourants, il ſe leva promptement, enfin il donna des marques non équivoques de l'alternative qu'il venait d'eſſuyer. Le baromêtre dans ce moment baiſſa de 10. pouces environ ; les exhalaiſons denſes & noires ne paſſerent point au delà du prémier filtre : ayant répliqué cette expérience ſans changer les filtres à cauſe de la grande quantité d'huile de tartre, dont je les avais enduits, j'en eus les mêmes réſultats : j'ai trouvé après avoir ôté les filtres que le plus proche du flacon contenait une eſpéce de calcination en aſſés grande quantité, dans celui qui ſuivait un ſel criſtalliſé, au troiſiéme un peu du même ſel, dans le dernier enfin je ne pû rien apperçevoir de ſenſible.

17. Le ſel qui ſe trouve dans le ſecond & troiſiéme filtre ſuivant le jugement que j'avais formé (16), devait contenir un eſpéce de nitre regénéré, car l'on ſait (*n*) que de l'inflammation du ſouffre combiné avec le ſalpêtre, il

s'éléve

(*n*) Voy. Macquer. el. de Chim. prat. pag. 60.

Digitized by Google

ſ'éléve des vapeurs, dont l'odeur eſt mélée d'un eſprit ſulfureux & d' eſprit de nitre, & ſi on les raſſemble, on trouve effectivement que la liqueur eſt un mélange d'acide nitreux, d'acide de ſouffre & d'eſprit ſulfureux, ce qui étant combiné avec l'alkali du tartre, doit donner un compoſé de nitre regéneré & de tartre vitriolé, j'en ai mis ſur un charbon en feu, & j'ai obſervé qu'il petillait, & fuſait ſenſiblement, ce qui a ſervi à me confirmer dans mon idée; faute d'une quantité ſuffiſante de ce ſel, je n'ai pu l'aſſujettir à d'autres éxamens.

18. Cette expérience comparée avec la précédente fait connaître que les exhalaiſons infectées dont le prémier fluide n'était pas purgé, ſont celles qui on fait périr l'animal, ce qui étant auſſi arrivé à Mr. Muſchembroek lui a donné lieu de douter que les fluides élaſtiques ſoient du véritable air.

19. J'ai emploié le même artifice pour obſerver ſi le fluide ainſi purgé perd une auſſi grande partie de ſon élaſticité qu'en a perdu celui que Mr Hanksbee avait gardé, ce qui devait ſervir à établir avec plus de fondement l'iſſue de mes recherches, quoique d'ailleurs Mr. Halles ait (*o*) vu qu'en diſtillant le ſalpêtre à travers l'eau, l'air qui s'en dévelopait conſervait ſon élaſticité, ce qui n'arrivait pas ſans cette précaution, car alors ſes réſultats aprochaient de ceux de Mr. Hauksbee.

EXPERIENCE TROISIEME.

UN robinet qui paſſait à travers la platine, & communiquait avec le récipient était ſoigneuſement luté à la partie ſupérieure (*a*) du tube d'un baromêtre, qui en cette occaſion ne touchait point au mercure, mais il était Fig. 2. pl. pr.

(*o*) Stat. des veg. pag. 166.

était recourbé en forme de ſiphon: le reſte de l'apareil était conforme à celui de l'expérience ſeconde. Je fis le vuide, & le mercure ſe trouvait environ à 27. pouces de hauteur, lorſque la Poudre prit feu; les oſcillations du mercure étant ceſſées, enſorte qu'on le voyait 10. à 12. pouces plus bas, je fermai le robinet, & je marquai avec un petit fil de ſoye ciré le point où répondait la ſurface ſupérieure adhérante aux parois du tube, j'ai laiſſé enſuite pendant long tems cet apareil ſans que j'aie aperçu de changement bien ſenſible à la hauteur du mercure, & par conſéquent à l'élaſticité du fluide, de ſorte que j'ai lieu de croire que ces petites variations aient été cauſées par celles de l'atmoſphére, ou ſi elles dépendaient encore du fluide, c'eſt peut être, parceque je ne l'ai pas aſſés purgé des exhalaiſons vicieuſes; car au lieu d'enduire les filtres d'huile, j'aurais pû mettre du ſel de tartre qui les aurait retenu plus ſûrément & en plus grande quantité; je ſuis d'autant plus porté à le conjécturer que les différences furent de peu de conſéquence, tandis que Mr. Hauksbee (*p*) a trouvé que le fluide qu'il avait gardé dix-huit jours perdit en ce tems $\frac{19}{20}$ de ſon élaſticité une ſeule 20.me reſtant conſtante.

20. Par la comparaiſon des expériences de Mr. Hauksbee, & de Mr. Halles, il eſt d'autant plus plauſible de conclure que le fluide élaſtique de la Poudre perd une grande partie de ſon élaſticité à cauſe des exhalaiſons ſulfureuſes, & des vapeurs acides; car Mr. Halles démontre que les exhalaiſons, & les vapeurs de cette nature fixent, ou abſorbent une quantité déterminée d'air, & que le reſte ne ſouffre plus d'altération, ce qui eſt préciſément conforme à l'iſſue qu'ont eû les expériences de Mr. Hauksbée, que j'ai cité ci-devant, *expér.* 3.

EXPE-

(*p*) Expér. Phiſ. mec. pag. 83.

Digitized by Google

EXPERIENCE QUATRIEME.

LE peu d'altération que, j'obſervai dans l'élaſticité du fluide me détermina à profiter de cet apareil pour éxaminer un autre caractére du véritable air, il s'agiſſait d'obſerver dans quelle raiſon il ſe comprimerait, & par l'infuſion que je fis de nouveau mercure dans la jambe recourbée, je trouvai qu'il ſe comprime à peu près de même que l'air commun en raiſon des poids. Fig. 2. pl. pr.

21. Mr. Muſchembroek n'ayant point parlé de l'élaſticité du fluide, & ayant remarqué ſeulement pour ainſi dire en paſſant la différence des raiſons de compreſſion entre ce fluide & l'air comun, je me ne ſuis pas trop attaché & n'ai pas pris toutes les précautions néceſſaires pour décider inconteſtablement ces deux points; il eſt cependant bon de ſavoir que Mr. Halles (q) ayant comprimé de ces airs factices a trouvé auſſi qu'ils ſuivent la loi de l'air comun.

22. La ſeconde objection de notre illuſtre Auteur ne peut qu'embaraſſer très-fort un Phyſicien par la grande difficulté qu'on rencontrerait dans l'arrangement d'une expérience qui ne laiſſa plus rien à déſirer d'autant plus qu'il a laiſſé ignorer celles, par leſquelles il a trouvé que le fluide élaſtique éteint la flamme; elle n'eſt cependant pas à mon avis auſſi ſolide, que l'autre, quoiqu'elle préſente au premier coup d'œil quelque choſe de plus frappant, qui parait décider la queſtion; l'altération que la chaleur violente cauſe à cette propriété de l'air, lors même qu'il eſt comun & naturel, nous tire de l'admiration où nous pourrions être en voyant dans le fluide élaſtique de la Poudre tous les caractéres de l'air comun, excepté celui-ci; l'on ſait que l'air

en

(q) Stat. des veg. pag. 164. & 369.

en paſſant par la flamme, ou autour des corps que l'on a fait fortement échaufer ne ſçaurait plus être propre non ſeulement à entretenir un autre flamme, mais auſſi à nourrir quelque feu que ce ſoit (r).

24. Delà il pourrait très-bien reſulter que l'air nouvellement développé de la Poudre, quoique rendu à ſon prémier état d'air comun, (en le purgeant des parties qui altéraient ſi fort ſes propriétés qu'on avoit lieu de douter avec quelque fondement de ſa véritable nature) cet air dis-je ſe dégageant des obſtacles qu'il n'aurait pu ſurmonter ſans le ſecours du feu, qui lui fait recouvrer ſubitement ſon élaſticité, peut être ne peut-il aquérir ce caractére, de même que l'air échaufé dans un récipient ſans rien perdre de ſa gravité ſpécifique, de ſon élaſticité &c. eſt cependant privé entiérement de cette vertu.

25. Après tout ce que nous venons de dire, il parait qu'il n'y a plus aucun lieu de douter de la nature du fluide élaſtique de la Poudre; l'air par conſéquent eſt le grand mobile des effets ſurprenans, que nous voyons, & le violent reſſort, qui agit ſi puiſſamment, en vertu des particules ignées qui le mettent en action: de ſorte que l'air contenu dans chaque grain fait le principe virtuel de la force, celui qui ſe trouve dans les intervales des grains ſert de véhicule à l'inflammation, & l'extérieur cauſe le détonnement par la colliſion & l'impulſion que ſouffrent ſes particules de celles qui ſe développent avec une viteſſe prodigieuſe à l'inflammation de la Poudre.

26. Puiſqu'après avoir analiſé le fluide élaſtique en queſtion il eſt démontré en conſéquence que l'opinion des Auteurs cités (1) quelque ingénieuſe & brillante qu'elle ſoit, n'eſt pas confirmée par l'expérience, il eſt tems d'examiner les ſentimens de ceux dont j'ai parlé (2), pour en dé-

méler

(r) Com. pag.

mêler les circonſtances qui font naître les différences entr' eux ſur la maniére, avec laquelle ils font agir l'air; qu' il reconnaiſſent tous comme la cauſe des effets de la Poudre, ſans qu' ils en aient aſſuré la vérité par des expériences.

I. Mr. Jean Bernoulli (s) prétend, que le feu met en action l' air condenſé dans chaque grain.

II. Mr. de la Hire (t) ajoute que non ſeulement l'air des grains eſt mis en agitation par le feu, mais auſſi celui qui ſe trouve dans les interſtices.

III. Mr. Belidor enfin généraliſe l' opinion, & ne met point de reſtriction à l' action de l' air, d' où l' on peut inférer qu' il comprend auſſi l' air extérieur.

27. Par ce qui a été dit on doit former le jugement ſuivant.

I. Que Mr. Bernoulli par ſon avis n'aſſigne que la ſource du fluide qui fait l' activité intrinſéque de la Poudre, ſans que tous ſes effets ordinaires ſoient compris en effet ſous l' idée qu' il avait de l' action de l' air, car il n' aurait pu combiner par ce ſeul ſecours le détonnement & la propagation du feu avec l' exploſion.

II. Mr. de la Hire a quelque avantage ſur Mr. Bernoulli, puiſqu' il pourrait indiquer la propagation du feu; cependant ſon opinion eſt encore imparfaite.

III. Mr. de Belidor n' ayant ſpécifié aucune eſpéce d' air, enſorte, qu' il n' entre point à déterminer l' action particuliére qu' elle exerce à chaque phénoméne, a donné un explication conforme à la vérité de la cauſe générale des effets ordinaires, qui n' eſt en ce cas que la combinaiſon des trois différentes propriétés, avec leſquelles l'air influë ſur les phénoménes mentionnés.

28. II

(s) Op. om. tom. pag. 34.
(t) Diſſ. an. 1702.

28. Il ſera moins difficile à préſent d'avoir avec plus de préciſion pluſieurs des connuës néceſſaires aux Mathématiciens pour reſoudre tous les Problêmes balliſtiques, & les autres de cette nature, puiſqu'en ſe ſervant des mêmes artifices, dont j'ai uſé, il ne s'agira plus que d'obſerver les différences des réſultats cauſées par les altérations apportées au fluide. Les expériences n'en ſeront ſans contredit pas moins délicates: l'utilité réelle qu'on y trouvera, ſera celle d'avoir une baze conſtante, dont on a déja bien des notions aſſurées, vu que pluſieurs de ſes propriétés caractériſtiques ſont ſoumiſes à des loix immuables, qui ſont ſous l'empire du Calcul: quoique ces données ayent été priſes juſqu'à préſent, (de l'aveu de Mr. Euler dans ſes notes à Mr. Robins) plutôt hipotétiquement à cauſe des grandes difficultés que l'on rencontre, cependant bien des ſavans ſe ſervant des obſervations plus aprochantes du vrai, ont répandu de grandes lumiéres ſur ce ſujet, non ſeulement par la réſolution de pluſieurs Problêmes, mais encore par les méthodes qu'ils ont fourni pour reſoudre les autres Problêmes poſſibles.

29. Mr. Nevvton eſt le prémier qui aie recherché la courbe que trace un corps pouſſé par la force de la Poudre en ſupoſant la réſiſtence de l'air proportionelle aux quarrés des viteſſes, & aprés bien des ſoins il l'a déterminée par aproximation. Mr. Jean Bernoulli en donna enſuite une ſolution plus ample & plus éxacte. Mr. Beniamin Robins après avoir trouvé que la viteſſe, avec laquelle l'air ſe précipite dans le vuide eſt moindre que celle, avec laquelle ſe meut un projectile pouſſé par la force de la Poudre, a déterminé la réſiſtence de l'air preſque en raiſon des cubes, & Mr. D'Alembert rapportant ce principe dans ſon excellent ouvrage ſur la réſiſtence des fluides lui fait une ingénieuſe application du Calcul; Mr. Euler enfin a donné dans ſes notes à Mr. Robins &

dans

Digitized by Google

dans une Diſſertation particuliére, (*u*) tout ce que l'on peut trouver de plus complet à préſent: il y a même ajouté des méthodes, & des formules pour reſoudre les cas poſſibles. Je n'entrerai pas dans un plus grand détail ſur ces ſortes d'applications, une telle digreſſion étant tout à fait étrangére au ſujet que je me ſuis propoſé.

(*u*) Mém. de l'Ac. R. des Sc. de Berlin tom. 6.

RECHERCHES
SUR LA METHODE
DE MAXIMIS, ET MINIMIS
PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

I. LES Géométres ſavent depuis long-tems, que lorſque la premiére différentielle d'une variable quelconque diſparoit ſans que la ſeconde diſparoiſſe en même tems, elle devient toujours un *maximum*, ou un *minimum*; & en particulier elle eſt un *maximum*, ſi ſa différentielle ſeconde eſt négative, & un *minimum*, ſi cette différentielle eſt poſitive. Si la différentielle ſeconde diſparoit en même tems que la premiére, alors la quantité n'eſt ni un *maximum*, ni un *minimum*, à moins que la troiſiéme différentielle ne diſparoiſſe de même, dans lequel cas la propoſée deviendra un *maximum*, ſi la différentielle quatriéme ſera négative, & un *minimum*, ſi elle eſt poſitive, & ainſi de ſuite. En général, pour qu'une quantité ſoit un *maximum*, ou un *minimum*, il faut que les ordres ſucceſſifs des différentielles, qui s'évanouiſſent enſemble, ſoient en nombre impair, & alors elle eſt ſûrement un *maximum*, ou un *minimum*, ſelon que la différentielle qui ſuit la dernière évanouiſſante ſe trouve négative, ou poſitive. Voyez Maclaurin, traité des fluxions p. 238. & 857.

2. Tout ceci ſuppoſé & bien entendu, que Z repréſente une fonction algébrique des variables t, u, x, y, &c., & qu'on ſe propoſe de la rendre un *maximum*, ou un *minimum*. Soit ſelon les regles ordinaires

dZ

Digitized by Google

$dZ = pdt + qdu + rdx + ſdy +$ &c., & l'on aura d'abord cette équation

$pdt + qdu + rdx + ſdy +$ &c. $= 0$. Mais comme la relation entre t, u, x, &c. eſt encore indéterminée, de même que celle de leurs différentielles dt, du, dx &c., & que d'ailleurs l'équation donnée doit être vraie quel que ſoit leur rapport; il eſt évident que pour les chaſſer tout à fait de l'équation, il faut égaler ſéparément à zero chaque membre pdt, qdu, rdx &c., d'où l'on tire autant d'équations particuliéres qu'il y a de variables ſavoir $p = 0$, $q = 0$, $r = 0$ &c. Par le moien de toutes ces équations on trouvera les valeurs de chaque inconnue, t, u, x &c. qui ſubſtituées dans la fonction propoſée Z la rendront un *maximum*, ou un *minimum*.

3. Paſſons maintenant à l'examen de la ſeconde différentielle. En ſuppoſant, ce qui eſt permis, les premiéres différentielles dt, du, dx &c. conſtantes, l'on aura $d^2Z = dpdt + dqdu + drdx + dſdy +$ &c.

Soit $dp = Adt + Bdu + Ddx + Gdy$

$dq = Bdt + Cdu + Edx + Hdy$

$dr = Ddt + Edu + Fdx + Idy$

$dſ = Gdt + Hdu + Idx + Ldy$

ce qui donnera

$d^2Z = Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2 + 2Ddtdx + 2Edudx + Fdx^2 + 2Gdtdy + 2Hdudy + 2Idxdy + Ldy^2$.

Pour commencer par le cas le plus ſimple ſuppoſons qu'il n'y ait qu'une ſeule variable t, de ſorte que $d^2Z = Adt^2$; on voit d'abord que, puiſque dt^2 eſt toujours poſitif, la différentielle d^2Z doit avoir le même ſigne que la quantité A; donc ſi A eſt poſitif Z ſera un *minimum*, & ſi A eſt négatif il ſera un *maximum*; ſi $A = 0$ on ſuivra les regles données §. 1.

Digitized by Google

4. Les variables contenues dans Z ſoient deux, ſavoir t & u; alors $d^2Z = Adt^2 + 2Bdtu + Cdu^2$. Il paroit au premier aſpect bien difficile de connoître ſi cette expreſſion d^2Z doit être poſitive, ou négative, ſans qu'on ait le rapport de dt à du, qui n'eſt pas donné; car puiſqu'en changeant ce rapport la fonction d^2Z doit auſſi varier, il ſemble indubitable qu'elle pourra auſſi paſſer du poſitif au négatif, & du négatif au poſitif, pendant que les quantités A, B, C reſtent les mêmes. Qu'on donne cependant à la propoſée $Adt^2 + 2Bdtdu + Cdu^2$ cette forme $A\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2$; & on verra que, comme les quarrés $\left(dt + \frac{Bdu}{A}\right)^2$, & du^2 ont toujours le même ſigne $+$, toute la quantité ſera néceſſairement poſitive ſi les deux coéficiens A & $C - \frac{B^2}{A}$ ſont poſitifs, & au contraire elle deviendra négative, lorſque ceux-ci ſeront tous deux négatifs, quel que ſoit le rapport de dt à du. On aura donc pour le cas du *minimum* $A > 0$ $C - \frac{B^2}{A} > 0$ ſavoir $C > \frac{B^2}{A}$, ou $CA > B^2$ ce qui donne de même $C > 0$; à moins donc que les quantités A, B, C n'aient ces conditions $A > 0$, $C > 0$, & $AC > B^2$ la propoſée Z ne pourra pas être un *minimum*. En ſecond lieu on trouvera pour le *maximum* $A < 0$ $C - \frac{B^2}{A} < 0$ ſavoir $C < \frac{B^2}{A}$, $CA > B^2$, puiſque A eſt négatif; ce qui donne encore $C < 0$; donc les conditions pour le *maximum* ſeront en partie les mêmes, & en partie préciſément contraires à celles du *minimum*.

5. Si

5. Si A ou C, ou toutes deux ſont $= 0$ ſans que B le ſoit auſſi, la condition de $AC > B^2$ ne pourra pas ſubſiſter, ainſi la quantité propoſée ne deviendra jamais un vrai *maximum*, ou *minimum*; la même choſe arrivera toutes les fois que A, & C ſeront de ſigne contraire; car puiſque B^2 eſt toujours poſitif la condition de $AC > B^2$ devient impoſſible. Si B s'évanouiſſoit encore en même tems que A, ou C; d^2Z ſe trouveroit réduite au cas d'une ſeule variable, & par conſéquent pourroit être de nouveau un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un, ni l'autre, ſelon ce qu'on a dit pour le premier cas. Enfin ſi la quantité d^2Z étoit toute $= 0$, ſavoir $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, il faudroit recourir à la différentielle troiſiéme; que ſi celle-ci ſe trouve n'être pas égale à zero, la quantité Z ne peut être ni un *maximum*, ni un *minimum*; & au contraire ſi elle évanouit en même téms que la ſeconde on cherchera tout de ſuite la quatriéme; & ſi elle n'eſt pas évanouiſſante il ſera facile par la méthode dont nous nous ſommes ſervi ci-devant de connoître ſi elle eſt poſitive, ou négative, ce qui déterminera de nouveau le *maximum*, ou le *minimum*.

6. Lorſque les variables ſont trois, ſavoir t, u, x la différentielle d^2Z prend cette forme $d^2Z = A\,dt^2 + 2B\,dt\,du + C\,du^2 + 2D\,dt\,dx + 2E\,du\,dx + F\,dx^2$ qu'on réduira d'abord à

$$A\left(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A}\right)^2 + \left(C - \frac{B^2}{A}\right)du^2$$

$$+ 2\left(E - \frac{BD}{A}\right)du\,dx + \left(F - \frac{D^2}{A}\right)dx^2$$

Soit poſé $C - \frac{B^2}{A} = a$, $E - \frac{BD}{A} = b$, $F - \frac{D^2}{A} = c$,

& on aura $d^2Z = A\left(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A}\right)^2 + a\,du^2 + 2b\,du\,dx + c\,dx^2$; qu'on opére à préſent ſur

ſur ces trois derniers membres, comme on a fait ci-deſſus §. 4., & toute la différentielle propoſée $d^2 Z$ deviendra $A\,(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A})^2 + a\,(du + \frac{b\,dx}{a})^2 +$ $(c - \frac{b^2}{a})\,dx^2$; or les quarrés $(dt + \frac{B\,du}{A} + \frac{D\,dx}{A})^2$, $(du + \frac{b\,dx}{a})^2$, & dx^2 étant toujours poſitifs, toute la différentielle ſera de même poſitive ſi les coéficiens A, a, & $c - \frac{b^2}{a}$ ont chacun le ſigne $+$; on a donc pour le *minimum* les conditions ſuivantes $A > 0$, $a > 0$, $ca > b^2$, ou en remettant au lieu de a, b, c, leurs valeurs, $A > 0$; $C - \frac{B^2}{A} > 0$, $(C - \frac{B^2}{A}) \times (F - \frac{D^2}{A}) > (E - \frac{BD}{A})^2$ ſavoir $A > 0$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2) \times (FA - D^2) > (EA - BD)^2$, d'où il réſulte encore $C > 0$, $F > 0$, & $FA > D^2$. On trouvera par les mêmes principes pour le *maximum* $A < 0$, $CA > B^2$, & $(CA - B^2)$ $(FA - D^2) > (EA - BD)^2$, & par conſéquent $C < 0$, $F < 0$, & $FA > D^2$.

7. Si les quantités A, & C évanouiſſent ſeules, ou toutes deux, ou une ſimplement, la ſeconde condition devient impoſſible; ſi c'eſt F qui s'évanouit, alors la troiſième devient impoſſible; car $(CA - B^2) \times - D$ qui eſt néceſſairement négatif, à cauſe de $CA > B^2$ doit toujours ſe trouver moindre de $(EA - BD)^2$, d'où il ſuit que Z ne ſauroit être un *maximum*, ou un *minimum*, ſi A, C, D priſes ſéparément, ou enſemble comme on voudra ſont égales à zero. Si par l'évanouiſſement des termes la différentielle $d^2 Z$ ſe reduiſoit à deux variables, ou à une ſeulement, elle tomberoit dans le ſecond cas, ou dans le premier, & on devroit ſuivre les regles données §. 3., & ſuiv. Enfin ſi toute la $d^2 Z$ ſe trouvoit égale à zero, &

que

Digitized by Google

que la différentielle troiſiéme ne ſoit pas de même égale à zero, on ſeroit ſur que la propoſée Z ne pourroit jamais devenir ni un *maximum*, ni un *minimum*; & quand cette différentielle troiſiéme évanouiroit avec la ſeconde, par des transformations ſemblables à celles que nous avons pratiquées, on pourroit dans la quatriéme différentielle diſtinguer les cas du *minimum*, & du *maximum*, & ceux qui ſont inutiles.

8. On peut étendre la même théorie aux fonctions de quatre, ou plus variables. Quiconque aura bien ſaiſi l'eſprit des réductions que j'ai employées juſqu'ici, pourra ſans peine découvrir celles qui conviendront à chaque cas particulier. Au reſte pour ne pas ſe méprendre dans ces recherches, il faut remarquer que les transformées pourroient bien venir différentes de celles que nous avons données; mais en examinant la choſe de plus-près on trouvera infailliblement que quelles qu'elles ſoient, elles pourront toujours ſe réduire à celles-ci, ou au moins y être compriſes.

9. Comme je crois cette théorie entiérement nouvelle, il ne ſera peut-être pas inutile d'ajouter les réflexions ſuivantes. Quel que ſoit le nombre des variables qui entrent dans la fonction propoſée Z; ſi on les regarde chacune en particulier, & qu'on cherche le *maximum*, ou *minimum* qui lui convient pendant que toutes les autres demeurent les mêmes, on trouvera à part les premiéres différentielles $p\,dt$, $q\,du$, $r\,dx$ &c., dont chacune étant égalée à zero, nous donneroit les mêmes équations que ci-deſſus, $p = 0$, $q = 0$, $r =$ &c. §. 2. De la même maniére paſſant aux différentielles ſecondes, ont trouveroit celles-ci ſéparément $A\,dt^2$, $C\,du^2$, $F\,dx^2$, $L\,dy^2$ &c., & par conſéquent ſi A, C, F, L &c. ſont toutes poſitives, ou négatives, on pourroit croire que cela ſuffit pour que les valeurs de t, u, x &c. tirées des équations $p = 0$,

$q = 0$

$q = o$ &c. rendent néceſſairement la propoſée Z un *minimum*, ou un *maximum*. Il eſt vrai en effet que par rapport à chacune de ces variables conſidérées à part la quantité donnée Z devra toujours être la plus grande, ou la plus petite; mais eſt-il certain que ce qui vaut pour chacune priſe ſéparément doive auſſi valoir pour toutes enſemble? Examinons la choſe plus intimément.

10. Que la propoſée Z contienne les ſeules variables t & u, & on pourra la regarder comme l'ordonnée à une ſurface, dont t & u ſont les deux autres; donc la queſtion dans ce cas ſe reduit à trouver la plus grande, ou la plus petite ordonné d'une ſurface, dont l'équation eſt donnée, ſavoir $dZ = pdt + qdu$. Si l'on fait u conſtant, elle ſe reduit d'abord à $dZ = pdt$, & dans ce cas elle exprime toutes les ſections de la même ſuperficie paralléles à l'axe des t, à meſure que la quantité u reçoit des valeurs différentes. Soit donc poſé $p = o$, & on aura §. 2. une valeur de t qui donnera la plus grande, ou la plus petite ordonnée Z dans chacune de ces ſections paralléles; mais puiſque u eſt conſtant, ſi l'on différentie de nouveau la dZ on a $d^2 Z = A dt^2$, & par conſéquent on jugera du *maximum*, ou *minimum* par la ſeule valeur de A, après y avoir cependant ſubſtitué à la place de t la valeur que fournit l'équation $P = o$. Savoir ſi A ſe trouve poſitive, ou négative quelle que ſoit la valeur d'u, ou bien ſi en changeant u, elle peut auſſi changer de ſigne, on conclura dans le premier cas que toutes les dites ſections ont un *maximum*, ou un *minimum*, & dans le ſecond qu'elles ont entre certaines limites un *maximum*, entre d'autres un *minimum*. Si A eſt $= o$, quelle que ſoit la valeur de la conſtante u, alors aucune des dites ſections n'aura ni un *maximum*, ni un *minimum*. Mais ſi A devient ſeulement $= o$, lorſque u a de certaines valeurs données, dans ces cas ſeulement les ſections correſpon-

reſpondantes ſeront deſtituées du *maximum*, ou du *minimum*. Le lieu de toutes ces ordonnées qui ſont un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un ni l'autre ſera contenu dans l'équation $p = 0$, en aiant égard à la ſeule variabilité de u, elle formeront donc dans la même ſuperficie une ſection qui ſera à ſimple, ou à double courbure, & qui ſera déterminée par les deux équations conjointes $dZ = pdt + qdu$ & $p = 0$, ou $dZ = qdu$ & $p = 0$. On voit par là, que pour trouver le *maximum*, ou le *minimum* de la ſurface entiére, il faudra chercher la plus grande, ou la plus petite ordonnée qui convient à cette même ſection; on aura donc de nouveau $q = 0$, ce qui donnera la valeur de l'autre variable u.

11. Paſſons maintenant à la différentielle de q; elle a été d'abord ſuppoſée $= Bdt + Cdu$ §. 3.; mais puiſque dans ce cas t eſt déterminé par u dans l'équation $p = 0$, ou bien dans ſa différentielle $Adt + Bdu = 0$, dt eſt $= -\frac{Bdu}{A}$, ce qui rend $dq = (-\frac{B^2}{A} + C)\,du$; il reſulte donc que ſi $-\frac{B^2}{A} + C$ eſt poſitif, ſavoir ſi $C > \frac{B^2}{A}$ l'ordonnée ſera la moindre; ſi $C < \frac{B^2}{A}$ elle ſera la plus grande, & ſi $C = \frac{B^2}{A}$ elle ne ſera ni l'une, ni l'autre, à moins que les conditions réquiſes dans les différentielles des genres plus élevés ne ſoient remplies. Or en reflechiſſant ſur ces *maximum* & *minimum*, il ſera aiſé de comprendre que l'ordonnée Z ne pourra pas être un *maximum* entre toutes les autres, à moins qu'elle ne ſoit la plus grande de toutes celles qui ſont contenues dans la ſection determinée par $dZ = qdu$, & de plus que toutes les ordonnées qui compoſent cette même ſection ne ſoient encore elles mêmes des *maximum* dans les ſections

parallèles correſpondantes. §. 10. On prouvera de même que la quantité Z ne ſauroit être abſolument un *minimum* ſans qu'elle ſoit de même un *minimum* dans la ſection qui contient tous les *minimum*. Car dans tous les autres cas l'ordonnée feroit ou la plus grande, ou la plus petite d'entre celles qui ne ſont ni les plus grandes, ni les plus petites, ou bien entre les plus grandes, ou les plus petites, elle ne feroit ni la plus grande, ni la plus petite, ou enfin elle ſeroit la plus grande d' entre les plus petites, ou au contraire, ce qui ne donne pas un vrai *maximum*, ou *minimum* comme on cherche. De tout ceci je conclus donc qu' après avoir tiré des équations $p = o$, $q = o$, les valeurs de t & u, & les avoir ſubſtituées dans A, & dans $C - \frac{B^2}{A}$ il faut pour que Z ſoit un vrai *maximum*, que A ſoit négatif, & $C < \frac{B^2}{A}$, ſavoir $CA > B^2$; & au contraire ſi Z doit être un vrai *minimum* on doit trouver A poſitif, & $C > \frac{B^2}{A}$, ou $CA > B^2$, conformément à la théorie générale expliquée §. 4., & *ſuiv.*

12. Si au lieu de conſidérer d' abord u conſtant & t variable, on avoit fait u variable & t conſtant, on ſeroit parvenu aux déterminations ſuivantes $C < o$, & $AC > B^2$, pour le *maximum* $C > o$, & $AC > B^2$, pour le *minimum* ce qui revient au même. Au reſte cette méthode que nous venons d' employer pour découvrir les conditions des *maximum* & *minimum* dans les fonctions à deux ſeules changeantes, eſt également applicable à toutes les autres fonctions plus compoſées, elle a même l' avantage d' être plus analitique, & plus directe que la premiére, c' eſt pourquoi je tâcherai ici de la développer dans toute ſa généralité.

13. So-

13. Soient les variables contenues dans Z en tel nombre qu'on voudra; je ne conſidére d'abord qu'une variable ſeule, & je tire par la différentiation l'équation pour le *maximum*, ou *minimum* qui lui convient; puis en paſſant à la différentielle ſeconde, je trouve les conditions qui déterminent la propoſée à être un *maximum*, ou un *minimum*, ou ni l'un ni l'autre. Après cette premiére opération je ſubſtitue dans Z, ou dans ſes différentielles ſimplement la valeur de la premiére variable trouvée, & je procéde ſur un autre variable de la même maniére; enſuite mettant de nouveau dans la fonction propoſée Z la valeur qu'on aura trouvée pour cette ſeconde variable, on paſſera à l'examen d'une troiſiéme variable; & ainſi de ſuite &c. Soit t la premiére variable qu'on veut conſidérer dans Z, & on aura $dZ = pdt$; & $d^2Z = Adt^2$; d'où $p = 0$, & $A > 0$ pour le *minimum*; $A < 0$ pour le *maximum* §. 1. Que t & u, ſoient à préſent toutes deux variables, il en réſultera $dZ = pdt + qdu$ qui à cauſe de $p = 0$ ſe reduit à $dZ = qdu$, d'où l'on tire $d^2Z = (Bdt + Cdu)\,du$; mais puiſque $p = 0$; dp le ſera auſſi, & par conſéquent $Adt + Bdu = 0$; ce qui donne $dt = -\frac{Bdu}{A}$; cette valeur ſubſtituée dans d^2Z la changera en $d^2Z = \left(-\frac{B^2}{A} + C\right) du^2$, j'aurois donc $q = 0$; & $-\frac{B^2}{A} + C > 0$ pour le *minimum*, & $-\frac{B^2}{A} + C < 0$ pour le *maximum*, ſavoir, puiſque A eſt poſitif dans le premier cas, & négatif dans le ſecond, en multipliant par A, il réſultera toujours la même condition de $AC > B^2$. Si outre les deux précédentes il y a encore une troiſiéme variable x à conſidérer, je cherche la valeur de dZ eu égard à ces trois variables t, u, x, & je trouve $dZ = pdt +$

$q\,d\,u + r\,d\,x$ ce, qui à cauſe de $p = 0$, $q = 0$ ſe change en $d\,Z = r\,d\,x$; donc la différentielle ſeconde $d^2 Z$ ſera $= (D\,d\,t + E\,d\,u + F\,d\,x)\,d\,x$. A préſent par le moyen des équations $p = 0$, $q = 0$, ou bien de leurs différentielles $A\,d\,t + B\,d\,u + D\,d\,x = 0$, & $B\,d\,t + C\,d\,u + E\,d\,x = 0$ je cherche des valeurs de $d\,t$ & $d\,u$ en $d\,x$, & je trouve

$d\,t = \frac{BE - CD}{AC - B^2}\,d\,x$; $d\,u = \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,d\,x$ je les ſubſtitue dans l'expreſſion de $d^2 Z$; ce qui me donne.

$d^2 Z = (\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F)\,d\,x^2$ Il réſulte donc en premier lieu pour le *maximum*, ou *minimum*. $r = 0$; enſuite

$\frac{BE - CD}{AC - B^2}\,D + \frac{BD - AE}{AC - B^2}\,E + F > 0$ pour le *minimum*, & < 0 pour le *maximum*, ou bien en ôtant le dénominateur $AC - B^2$ qui eſt toujours poſitif, on a $2\,BDE - CD^2 + AE^2 - FB^2 + ACF > 0$ pour le *minimum*, & < 0 pour le *maximum*. Soit multipliée cette expreſſion par A qui eſt poſitif dans le premier cas, & négatif dans le ſecond, & on aura

$2\,ABDE - ACD^2 - A^2E^2 - AB^2F + A^2CF > 0$ ſoit pour le *maximum*, ſoit pour le *minimum*, ſavoir $(CA - B^2) \times (FA - D^2) > (EA - BD)^2$. On ſuivra le même procédé pour un plus grand nombre de variables.

14. Cette méthode étant générale pour quelque nombre de variables que ce ſoit, ne ſera pas bornée au ſeules fonctions algébriques, mais pourra encore s' étendre avec ſuccès aux *maximum* & *minimum* qui ſont d' un genre plus élevé, & qui appartiennent à des formules intégrales indéfinies. Je me reſerve de traiter ce ſujet que je crois d' ailleurs entiérement nouveau dans un ouvrage particulier que je prépare ſur cette matiére; & dans lequel après

avoir

Digitized by Google

avoir expoſé la méthode générale, & analitique pour réſoudre tous les problêmes touchant ces ſortes de *maximum*, ou *minimum* j'en déduirai, par le Principe de la moindre quantité d'Action, toute la Mécanique des corps ſoit ſolides, ſoit fluides.

15. Je finirai ce mémoire par quelques exemples des plus ſimples qui éclairciſſent la théorie qu'on vient d'établir. Soient tant de corps qu'on voudra parfaitement élaſtiques, & rangés en ligne droite ſans ſe toucher; ſuppoſons que le premier vienne choquer le ſecond avec une viteſſe donnée c, le ſecond avec la viteſſe acquiſe du premier choque le troiſiéme, & ainſi de ſuite, les maſſes du premier & du dernier étant données, on demande celles des corps intermédiaires, afin que le dernier reçoive la plus grande viteſſe poſſible. Soit a la maſſe du premier, & b celle du dernier; ſoient enſuite t, u, x, y *&c.* les maſſes intermédiaires inconnues; par les loix du choc on trouvera la viteſſe comuniquée par le premier corps a au ſecond $t = \frac{2ac}{a+t}$, celle que donne celui-ci au troiſiéme $u = \frac{2act}{(a+t)(t+u)}$ & ainſi de ſuite; donc la viteſſe que reçevra le dernier b ſera exprimée par $\frac{2catuxy \ldots\ldots\ldots\ldots b}{(a+t)(t+u)(u+x)(x+y)\ldots\ldots\ldots}$ expreſſion qui doit devenir un *maximum*. Pour en trouver plus aiſément la différentielle, qu'on la ſuppoſe $= Z$, & prenant les logarithmes d'une part, & de l'autre on trouvera $l\,2ca + lt + lu + lx + ly +$ *&c.* $- l(a+t) - l(t+u) - l(u+x) - l(x+y) -$ *&c.* $= lZ$ ce qui donne par la différentiation $\frac{dt}{t} + \frac{du}{u} + \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} +$ *&c.* $- \frac{dt}{a+t} - \frac{dt+du}{t+u} - \frac{du+dx}{u+x} - \frac{dx+dy}{x+y} -$ *&c.* $= \frac{dZ}{Z}$; d'où en mettant enſemble, & reduiſant au même dénominateur les

les termes affectés des mêmes différentielles l'on tire $dZ = \frac{Z(au-t^2)dt}{t(a+t)(t+u)} + \frac{Z(tx-u^2)du}{u(t+u)(u+x)} + \frac{Z(uy-x^2)dx}{x(u+x)(x+y)} +$ &c. On aura donc en premier lieu pour le *maximum*, ou *minimum* les équations ſuivantes $au = t^2$; $tx = u^2$; $uy = x^2$ &c. qui donnent les analogies $a:t = t:u$, $t:u = u:x$, $u:x = x:y$ &c., ſavoir $\div a:t:u:x:y: \ldots \ldots b$; d'où l'on voit que toutes les maſſes doivent conſtituer une progreſſion géométrique, dont les deux extrêmes ſont les données a & b. Pour juger à préſent du *maximum*, ou *minimum* ſoit fait d'abord pour abréger $\frac{Z}{t(a+t)(t+u)} = \alpha$; $\frac{Z}{u(t+u)(u+x)} = \beta$; $\frac{Z}{x(u+x)(x+y)} = \gamma$ &c. on aura $p = \alpha(au-t^2)$; $q = \beta(tx-u^2)$; $r = \gamma(uy-x^2)$ &c. donc $dp = (au-t^2)d\alpha + \alpha(adu - 2tdt)$; $dq = (tx-u^2)d\beta + \beta(xdt + tdx - 2udu)$; $dr = (uy-x^2)d\gamma + \gamma(ydx + udy - 2xdx)$ &c. Or comme les termes a, t, u, x, y &c. doivent être en progreſſion continue ſi l'on nomme $1:m$ la raiſon conſtante d'un antécédent quelconque à ſon conſéquent on trouve $t = ma$, $u = m^2a$, $x = m^3a$, $y = m^4a$, &c.; de plus $\beta = \frac{\alpha}{m^3}$; $\gamma = \frac{\alpha}{m^6}$ &c., leſquelles valeurs ſubſtituées dans les expreſſions précédentes les reduiront à $dp = \alpha a(du - 2mdt)$; $dq = \alpha a\left(dt - \frac{2du}{m} + \frac{dx}{m^2}\right)$; $dr = \alpha a\left(\frac{du}{m^2} - \frac{2dx}{m^3} + \frac{dy}{m^4}\right)$; & ainſi des autres. On aura donc $A = -2m\alpha a$; $B = \alpha a$; $C = -\frac{2\alpha a}{m}$; $D = 0$; $E = \frac{\alpha a}{m^2}$; $F = -\frac{2\alpha a}{m^3}$; $G = 0$; $H = 0$; $I = \frac{\alpha a}{m^4}$ &c.

On

Digitized by Google

On voit par là en premier lieu que A eſt négatif, & que par conſéquent la propoſée doit être un *maximum* ſi les autres conditions ſe trouvent remplies. Or $AC = 4\alpha^2 a^2$, & $B^2 = \alpha^2 a^2$ donc 1mo $AC > B^2$; $AC - B^2 = 3\alpha^2 a^2$ $FA - D^2 = \frac{4\alpha^2 a^2}{m^2}$; $EA - BD = -\frac{2\alpha^2 a^2}{m}$, donc

$$(AC - B^2)\times(FA - D^2) = \frac{12\alpha^4 a^4}{m^2}, \text{ \& } (EA - BD)^2$$

$= \frac{4\alpha^4 a^4}{m^2}$, & par conſéquent 2do $(AC - B^2)\times(FA - D^2) > (EA - BD)^2$. S'il n'y a que deux maſſes intermédiaires t & u, il ſuffit d'avoir égard à la premiére de ces conditions, s'il y en a trois il faut encore conſidérer la ſeconde; s'il y en avoit pluſieurs autres il faudroit avoir recours à autant de conditions qu'il y a de variables. Au reſte dans ce probléme on les trouvera toutes remplies, ſi on veut bien prendre la peine de pouſſer plus loin le calcul; de ſorte qu'on peut franchement aſſûrer, que lorſque les maſſes intermédiaires quel que ſoit leur nombre ſont telles qu'elles forment une progreſſion géométrique entre les deux extrémes données, la viteſſe que reçoit la derniére par leur moyen eſt toujours la plus grande poſſible. Ce probléme a été traité par Mr. Huguens le premier, & depuis par beaucoup d'autres Géométres; mais ſans avoir aucunement égard aux nouvelles déterminations, que nous avons cependant trouvées néceſſaires pour s'aſſûrer de l'exiſtence du *maximum*, ou *minimum*.

16. Soit l'équation générale pour les ſurfaces de ſecond ordre $z^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2 - ex - fy$, qu'on ſe propoſe de trouver le point où l'ordonnée z eſt la plus grande, ou la plus petite; on aura en différentiant $2zdz = 2axdx + 2bydx + 2bxdy + 2cydy - edx - fdy$ ce qui fournit d'abord les deux équations ſuivantes $ax + by = \frac{e}{2}$; $cy + bx = \frac{f}{2}$, d'où l'on tire

$x =$

Digitized by Google

$x = \frac{ec - fb}{2(ac - b^2)}$; $y = \frac{eb - fa}{2(ac - b^2)}$. Différentions de nouveau la différentielle trouvée, & on aura, puiſque $dz = 0$, $2zd^2z = 2adx^2 + 4bdxdy + 2cdy^2$ où les quantités x, y ne ſe trouvent plus. Or afin que l'ordonnée z ſoit un vrai *maximum*, ou *minimum*, il faut que a & c ſoient toutes deux négatives dans le premier cas, & toutes deux poſitives dans le ſecond, de plus il faut encore que $ca > b^2$, car ſans cela les valeurs trouvées pour les ordonnées x & y ne donneroient jamais ni un *maximum*, ni un *minimum*; en effet toutes les fois que ca n'eſt pas plus grand que b^2; le célébre Mr. Euler a demontré par une autre voie dans l'appendice à l'introduction à l'Analiſe des infiniment petits, que la ſurface propoſée s'étend à l'infini, & qu'elle a une aſſimptôte conique. Il paroit donc clairement que la méthode pour déterminer les *maximum* & *minimum*, quand il y a pluſieurs variables en ne les regardant qu'une à la fois, peut ſouvent être très-fautive. Car par exemple dans le cas précédent, en traitant d'abord x comme variable, on trouve la différentielle premiére $2(ax + by - \frac{e}{2})dx$, & la ſeconde $2adx^2$; de même en faiſant varier y on a pour la différentielle premiére $2(cy + bx - \frac{f}{2})dy$, & pour la ſeconde $2cdy^2$. Or les deux différentielles premiéres poſées $=$ à zero donnent les mêmes équations qu'on a trouvé, & les deux ſecondes font voir que ſi a & c ſont toutes deux poſitives, ou toutes deux négatives l'ordonnée z eſt un *maximum*, ou un *minimum*, ſi on a ſimplement égard à la variabilité des x & y conſidérées ſéparément; mais on n'eſt pas en droit de conclure pour cela que z ſoit un *maximum*, ou un *minimum*, par rapport à toutes deux enſemble, comme on vient de le voir.

Sur

Digitized by Google

Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la théorie des ſuites récurrentes

PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

1. SOIT propoſée l'équation différentielle $dy + yXdx = Zdx$, ou X & Z expriment des fonctions quelconques de la variable x; l'on ſait que pour intégrer cette équation, il ſuffit de faire $y = uz$, ce qui donne $udz + zdu + uzXdx = Zdx$, où l'on peut faire évanouir deux termes par une valeur convenable de u, ou de z. Suppoſons donc $zdu + uzXdx = 0$, & diviſant par z, l'on aura $du + uXdx = 0$, & par conſéquent $\frac{du}{u} = -Xdx$, & $lu = -\int Xdx$, ſavoir $u = e^{-\int Xdx}$, ou e eſt le nombre, dont le logarithme hyperbolique eſt 1. Par cette ſuppoſition la propoſée deviendra $udz = Zdx$, ce qui donne $dz = \frac{Zdx}{u}$; $z = \int \frac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx$, & enfin $y = uz = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}$.

2. En obſervant le procédé de cette méthode, on verra aiſément qu'elle doit pouvoir s'appliquer encore avec ſuccès aux équations différentielles qui ont la même forme que la précédente; quoique les différences ſoient ſuppoſées finies. Soit donc l'équation $dy + My = N$, dont la différentielle dy ſoit finie, & les autres quantités M & N ſoient des fonctions d'une autre variable quelconque x. Suppoſons en premier lieu $y = uz$, & l'on aura dans ce cas $dy = udz + zdu + dudz$, & l'équation ſe changera en $udz + zdu + dudz + Muz = N$. Qu'on poſe comme ci-deſſus les deux ter-

Digitized by Google

mes $z\,du + Muz = 0$, & on aura $du + Mu = 0$, ſavoir $\frac{du}{u} = -M$; pour reſoudre cette équation dans notre cas où la différentielle du n'eſt pas infiniment petite, qu'on ſuppoſe $u = e^t$, & l'on aura $u + du = e^{t+dt}$; & $du = e^t(e^{dt} - 1)$; d'où $\frac{du}{u} = e^{dt} - 1 = -M$; $e^{dt} = 1 - M$, & prenant les logarithmes $dt = l(1 - M)$, & enſuite intégrant $t = \int l(1 - M)$; mais l'on ſait que la ſomme des logarithmes de pluſieurs nombres eſt égale au logarithme du produit de tous ces nombres; donc ſi l'on exprime généralement par $\pi.(1 - M)$ le produit continuel de toutes les quantités contenues dans la formule $1 - M$, on aura $t = l\pi.(1 - M)$, & par conſéquent $u = e^t = \pi.(1 - M)$. Par l'évanouiſſement de ces deux termes l'équation devient $u\,dz + du\,dz = N$, d'où l'on tire $dz = \frac{N}{u + du}$, & en intégrant $z = \int \frac{N}{u + du}$. Mais ayant déja trouvé $u = \pi.(1 - M)$, ſi l'on exprime par M^1 le terme conſécutif à M on aura $u + du = \pi.(1 - M^1)$, & par conſéquent $z = \int \frac{N}{\pi.(1 - M^1)}$; & puiſque $y = zu$, $y = \pi.(1 - M) \times (\int \frac{N}{\pi.[1 - M^1]})$, ou bien en ajoutant à cette intégration une conſtante quelconque A; $y = \pi.(1 - M) \times (A + \int \frac{N}{\pi.[1 - M^1]})$.

3. Soit à préſent propoſée l'équation $y^1 = Ry + T$, ou y^1 eſt le terme qui ſuit y dans la ſuite des y; puiſque $y^1 = y + dy$ elle ſe reduira à $dy + (1 - R) \times y = T$. Qu'on faſſe donc $1 - R = M$; $T = N$, & l'on trouvera pour la valeur de y l'expreſſion ſuivante $ly = \pi.R.(A + \int \frac{T}{\pi.R})$. Si R eſt une quantité conſtante,

ſtante ; il eſt clair que $\pi . R$ & $\pi . R^1$ deviennent des puiſſances de R, donc l'expoſant eſt égal au nombre qui dénote la place des termes y, & y^1 dans la ſuite des y; ſoit donc m ce nombre, de ſorte que y^m ſoit le même que y, & on aura $y^m = R^m \left(A + \int \frac{T}{R^{m+1}} \right)$. Si T eſt conſtant $\int \frac{T}{R^{m+1}}$ eſt $= T \int \frac{1}{R^{m+1}}$, où les termes exprimés par $\frac{1}{R^{m+1}}$ forment une progreſſion géométrique, dont il ſera aiſé d'avoir la ſomme ; ſoit cette ſomme qui commence par $\frac{1}{R} = S$, ſavoir que $\frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^3} + \&c. + \frac{1}{R^m} = S$, & on aura, en multipliant par R, $1 + \frac{1}{R} + \frac{1}{R^2} + \&c. + \frac{1}{R^{m-1}} = SR = S + 1 - \frac{1}{R^m}$ de cette égalité l'on tirera $S = \frac{R^m - 1}{R^m [R - 1]}$, par conſéquent $y^m = R^m \left(A + T \frac{R^m - 1}{R^m [R - 1]} \right)$, ou bien $y^m = AR^m + T . \frac{R^m - 1}{R - 1}$.

4. Pour ſe convaincre que cette valeur de y ſatisfait entiérement aux conditions de l'équation donnée $y^1 = Ry + S$, ou bien $y^{m+1} = Ry^m + S$, on n'a qu'à multiplier la formule trouvée pour y^m par R, & lui ajouter la quantité T, & l'on trouvera le réſultat $AR^{m+1} + T . \frac{R^{m+1} - R}{R - 1} + T$ qui ſe réduit à $AR^{m+1} + T . \frac{R^{m+1} - 1}{R - 1}$ qui eſt la valeur que la formule générale nous donne pour le terme y^{m+1}.

5. Après avoir trouvé la méthode d'intégrer toute équation différentielle à différences finies, compriſe ſous la

Digitized by Google

forme générale $dy + My = N$, l'on pourra de même procéder à l'intégration des autres qui dépendent de celle-ci. Or Mr. D'Alembert dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin a fait voir, que toutes les équations différentielles, telles que

$y + \frac{A\,dy}{dx} + \frac{B\,d^2y}{dx^2} + \frac{C\,d^3y}{dx^3} + \text{\&c.} = X$ où A, B, C &c. ſont des conſtantes quelconques, & où X eſt une fonction quelconque de x, ſe réduiſent à une équation de cette forme $z + \frac{H\,dz}{dx} = V$, ou H eſt une conſtante, & V une fonction de x; laquelle équation eſt la même que nous avons appris à intégrer dans le cas même des différences finies. Si donc le procédé de Mr. D'Alembert peut avoir lieu auſſi quand les différences ſont finies, l'on pourra intégrer encore dans cette circonſtance tout équation différentielle de cette forme $y + A\,dy + B\,d^2y + C\,d^3y + \text{\&c.} = X$, & par conſéquent l'équation $y^{\text{I}} + P y^{\text{II}} + Q y^{\text{III}} + \text{\&c.} = X$, qu'on peut regarder comme la formule générale des ſuites récurrentes. La méthode de Mr. D'Alembert ſe trouve détaillée dans le ſecond tome du Calcul intégral de Mr. Bougainville; mais pour épargner de peine aux Lecteurs je tâcherai de la développer ici en peu de mots. Qu'on ſuppoſe $\frac{dy}{dx} = p$, $\frac{dp}{dx} = q$, $\frac{dq}{dx} = r$ &c., & l'équation propoſée ſe changera en $y + Ap + Bq + \frac{C\,dq}{dx} = X$. Qu'on multiplie à préſent chacune des équations qu'on a ſuppoſé par des coéficiens indéterminés a, b, c &c., & qu'on les ajoute toutes à celle-ci; on aura $y + (A + a)p + (B + b)q - \frac{a\,dy}{dx} - \frac{b\,dp}{dx} + \frac{C\,dq}{dx} = X$. Soit fait enſorte que la

pre-

première partie du premier membre de cette équation devienne un multiple exact de l'intégral de la ſeconde, ſavoir que $dy + (A+a)\,dp + (B+b)\,dq = dy + \frac{b\,dp}{a} - \frac{C\,dq}{a}$, & en comparant terme à terme il en reſultera $A+a = \frac{b}{a}$; $B+b = -\frac{C}{a}$; de ces deux équations l'on tire $b = -\frac{C}{a} - B = aA + a^2$, & $a^3 + Aa^2 + aB + C = 0$, dont les racines donneront trois valeurs d'a qui ſatisfairont également aux conditions requiſes. Suppoſons maintenant $y + (A+a)\,p + (B+b)\,q = z$, l'équation trouvée deviendra $z - \frac{a\,dz}{dx} = X$, laquelle comparée avec celle du §. 1. donnera en intégrant $z = e^{x:a} \int \frac{X}{a\,e^{x:a}}$. Or comme la quantité a peut avoir trois valeurs différentes, nommons les $a^{\text{I}}, a^{\text{II}}, a^{\text{III}}$, & exprimons par Z^{I} la valeur de z qui contient a^{I}, par Z^{II} celui qui contient a^{II}, & par Z^{III} celui qui contient a^{III}; on aura donc les trois équations ſuivantes;

$$y + (A+a^{\text{I}})\,p + (B+b^{\text{I}})\,q = Z^{\text{I}}$$
$$y + (A+a^{\text{II}})\,p + (B+b^{\text{II}})\,q = Z^{\text{II}}$$
$$y + (A+a^{\text{III}})\,p + (B+b^{\text{III}})\,q = Z^{\text{III}}.$$

De ces trois équations on tirera la valeur de y, laquelle à cauſe des quantités conſtantes A, B, a^{I}, a^{II} &c. ſe réduira à cette forme $y = FZ^{\text{I}} + GZ^{\text{II}} + HZ^{\text{III}}$, où F, G, H ſont des conſtantes, dont la valeur dépend des autres A, B, a^{I}, a^{II} &c.

6. Si l'on examine le procédé de cette méthode il paroitra clairement que ſi l'équation eut contenu beaucoup plus de termes, par exemple qu'elle eut été

$$y + \frac{A\,dy}{dx} + \frac{B\,d^2y}{dx^2} + \frac{C\,d^3y}{dx^3} + \frac{D\,d^4y}{dx^4} + \frac{E\,d^5y}{dx^5} + \&c = X + \&c.$$

l'on auroit trouvé de même $y = FZ^{I} + GZ^{II} + HZ^{III} + IZ^{IV} + KZ^{V}$, où les quantités Z^{I}, Z^{II}, &c. ſont des fonctions de X & x, telles que

$Z = e^{x:a} \int \frac{-X}{a e^{x:a}}$, en poſant pour a les racines a^{I}, a^{II} a^{III}, a^{IV}, a^{V} de cette équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$; de plus l'on s'appercevra que les opérations que requiert cette méthode peuvent également ſe faire, ſoit que les différences ſoient finies, ou qu'elles ſoient infiniment petites.

7. Ayant donc l'équation à différences finies $y + Ady + Bd^2y + Cd^3y + Dd^4y + Ed^5y = X$, & poſant $dy = p$, $dp = q$, $dq = r$, $dr = ſ$, l'on parviendra de la même maniére à une équation telle que $z - adz = X$, où $z = y + (A + a)p + (B + b)q + (C + c)r + (D + d)ſ$, & la quantité a dépendra de cette équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$, dont les racines ont été deja ſuppoſées a^{I}, a^{II} a^{III}, a^{IV}, a^{V}. Que l'on compare à préſent l'équation $z - adz = X$, avec celle du §. 2., ſavoir $dy + My = N$, & on aura $M = -\frac{1}{a}$; $N = -\frac{X}{a}$; par conſéquent $1 - M = \frac{1 + a}{a}$, ce qui donne enfin $z = \pi.\left(\frac{1+a}{a}\right) \times \left[const. + \int \frac{-X}{a} : \pi.\left(\frac{1+a}{a}\right)\right]$, ou bien puiſque a eſt conſtant $z^m = \left(\frac{1+a}{a}\right)^m . \left(const. - \int \frac{Xa^m}{[1+a]^{m+1}}\right)$; m exprimant comme ci-deſſus le quantiéme du terme z dans la ſérie des z. Si l'on fait de plus X conſtant on aura en prenant la ſomme de la progreſſion géométrique exprimée par $\int \frac{a^m}{[1+a]^{m+1}}$; $z^m = \left(\frac{1+a}{a}\right)^m \times \left(const. - X.\frac{(1+a)^m - a^m}{[1+a]^m}\right)$. Or comme a peut avoir les valeurs a^{I}, a^{II}, a^{III}, a^{IV}, a^{V} il eſt

clair

clair qu'en ſubſtituant chacune d'elles dans la formule trouvée, il en réſultera autant de valeurs de z^{m} qui ſatisferont toutes également. Soient donc toutes ces valeurs exprimées par $Z^{I}, Z^{II}, Z^{III}, Z^{IV}, Z^{V}$, & puiſque $z = y + (A+a)p + (B+b)q + (C+c)r + (D+d)ſ$, l'on tirera par le moyen des cinq équations $z = Z^{I}$ $z = Z^{II}$, $z = Z^{III}$, $z = Z^{IV}$, $z = Z^{V}$, l'expreſſion ſuivante de y, ſavoir $y = FZ^{I} + GZ^{II} + HZ^{III} + IZ^{IV} + KZ^{V}$.

8. Soit enfin propoſée l'équation $y^{I} + Ay^{II} + By^{III} + Cy^{IV} + \&c. = X$, où y^{I}, y^{II}, y^{III} &c. expriment des termes conſécutifs de la ſuite des y; il eſt d'abord évident que, puiſque $y^{II} = y^{I} + dy^{I}$; $y^{III} = y^{I} + 2\,dy^{I} + d^{2}y^{I}$, & ainſi des autres, cette équation peut être ramenée à la forme de celle que nous venons d'examiner; mais puiſque le Calcul devient de cette façon trop long, il ſera utile de la reſoudre directement par les mêmes principes que nous avons employés juſqu'ici. De plus afin de pouvoir plus aiſément appliquer cette équation aux ſéries récurrantes, il ſera mieux de conſidérer les termes y^{I}, y^{II}, y^{III} &c. dans un ordre renverſé, ſavoir que $y^{II} + dy^{II} = y^{I}$; $y^{III} + dy^{III} = y^{II}$; & ainſi des autres, de ſorte que les expoſans I, II, III &c. dénotent la diſtance de chaque terme au dernier y^{I}. Suppoſons $y^{II} = p^{I}$, & l'on aura $y^{III} = p^{II}$, ſoit donc de nouveau $p^{II} = q^{I}$ & $p^{III} = q^{II}$; ſoit encore $q^{II} = r^{I}$ & $q^{III} = r^{II} = ſ^{I}$, & l'on aura $y^{II} = p^{I}$; $y^{III} = q^{I}$; $y^{IV} = r^{I}$; $y^{V} = ſ^{I}$, $y^{VI} = ſ^{II}$; ſubſtituant ces valeurs dans la propoſée, elle deviendra $y^{I} + Ap^{I} + Bq^{I} + Cr^{I} + Dſ^{I} + Eſ^{II} = X$. Qu'on réduiſe à préſent les ſuppoſitions précédentes en équations, ſavoir $p^{I} - y^{II} = 0$; $q^{I} - p^{II} = 0$; $r^{I} - q^{II} = 0$; $ſ^{I} - r^{II} = 0$, & après les avoir multipliées par les coéficiens indéterminés a, b, c &c. qu'on les ajoute toutes à celle qu'on vient de trouver. Il en réſultera

ſultera la ſuivante $y^{I} + (A+a)p^{I} + (B+b)q^{I} + (C+c)r^{I} + (D+d)ſ^{I} - ay^{II} - bp^{II} - cq^{II} - dr^{II} + Eſ^{II} = X$. Qu'on faſſe maintenant que chaque coéficient de la premiére partie ſoit multiple de la même maniére de ſon correſpondant dans la ſeconde, & l' on parviendra aux mêmes équations qu' on a trouvé §. 6., & la quantité a ſera déterminée par l' équation $a^{5} + Aa^{4} + Ba^{3} + Ca^{2} + Da + E = 0$, dont on a ſuppoſé les racines a^{I}, a^{II}, a^{III} &c. Donc ſi l'on fait $y^{I} + (A+a)p^{I} + (B+b)q^{I} + (C+c)r^{I} + (D+d)ſ^{I} = z^{I}$ l'équation ſe reduira à $z^{I} - az^{II} = X$, qui par une intégration ſemblable à celle du §. 3. donnera

$$z^{m} = a^{m}. \left(conſt. + \int \frac{X}{a^{m+1}}\right),$$ où m exprimera le quantiéme du terme z^{m} dans la ſuite des z. Or comme pour a l'on peut ſubſtituer chacune des cinq racines a^{I}, a^{II}, a^{III} &c. de l' équation $a^{5} + Aa^{4} +$ &c. $= 0$, l'on aura de même cinq valeurs différentes de z^{m} que nous exprimerons comme ci-deſſus par Z^{I}, Z^{II}, Z^{III} &c.; donc à cauſe que $z^{m} = y^{m} + (A+a)p^{m} + (B+b)q^{m} + (C+c)r^{m} + (D+d)ſ^{m}$, l' on parviendra en chaſſant les lettres p^{m}, q^{m} &c. à la formule $y^{m} = FZ^{I} + GZ^{II} + HZ^{III} + IZ^{IV} + KZ^{V}$, où F, G, H &c. ſont des conſtantes qu' on doit puis déterminer par la comparaiſon d' autant de termes donnés dans la ſuite des y.

9. Si X eſt conſtant, par ce qu' on a démontré §. 4. la ſomme exprimée par $\int \frac{X}{a^{m+1}}$ deviendra $= X\frac{a^{m}-1}{a^{m}[a-1]}$; & nommant L la conſtante ajoutée à cette intégration, on aura finalement $Z = La^{m} + X\frac{a^{m}-1}{a^{m}[a-1]}$, d'où l' on tirera par conſéquent les autres valeurs Z^{I}, Z^{II}, Z^{III} &c. en ſubſtituant à la place de a ſes valeurs a^{I}, a^{II}, a^{III} &c.

Digitized by Google

10. De tout ceci l'on peut déduire le théorème général ſuivant; ſi l'on a l'équation
$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4} + Ey^{m-5}$ $+$ &c. $= X$, où les expoſans des y dénotent leurs places; que l'on cherche toutes les racines a^{I}, a^{II}, a^{III} a^{IV} &c. de l'équation $a^5 + Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E = 0$, & l'on aura généralement

$$y^m = Fa^{Im}\left(L + \int\frac{X}{a^{Im+1}}\right) + Ga^{IIm}\left(L + \int\frac{X}{a^{IIm+1}}\right) +$$

$$Ha^{IIIm}\left(L + \int\frac{L}{a^{IIIm+1}}\right) + Ia^{IVm}\left(L + \int\frac{X}{a^{IVm+1}}\right) +$$

$$Ka^{Vm}\left(L + \int\frac{X}{a^{Vm+1}}\right) + \&c.$$

& dans le cas, où X eſt conſtant.

$$y^m = L\left(Fa^{Im} + Ga^{IIm} + Ha^{IIIm} + Ia^{IVm} + Ka^{Vm} + \&c.\right)$$

$$+ X\left(F\frac{a^{Im}-1}{a^{I}-1} + G\frac{a^{IIm}-1}{a^{II}-1} + H\frac{a^{IIIm}-1}{a^{III}-1} + \right.$$

$$\left. I\frac{a^{IVm}-1}{a^{IV}-1} + K\frac{a^{Vm}-1}{a^{V}-1} + \&c.\right).$$ Si $X = 0$ l'on pourra ſupprimer la conſtante L, & on aura plus ſimplement

$$y^m = Fa^{Im} + Ga^{IIm} + Ha^{IIIm} + Ia^{IVm} + Ka^{Vm} \ \&c.$$

formule connuë pour l'expreſſion du terme général de la ſuite des y, telle que

$$y^m + Ay^{m-1} + By^{m-2} + Cy^{m-3} + Dy^{m-4} + Ey^{m-5} + \&c. = 0;$$

ce qui n'eſt autre choſe qu'une ſuite récurrente, dont l'échelle de rélation eſt $-A - B - C - D - E -$ &c.

11. Voila donc la théorie des ſuites récurrentes réduite au calcul différentiel, & établie de cette façon ſur des Principes directs & naturels au lieu que juſqu'ici elle n'a été traitée que par de voies tout-à-fait indirectes. De plus les recherches qu'on a fait ſur cette matiére, ont toujours été bornées au cas de $X = 0$; & perſonne que je ſache n'a jamais entrepris d'examiner généralement les autres cas, où X eſt conſtant, ou même variable, ce qui

peut néanmoins être de la derniére importance pour la réſolution de pluſieurs problêmes qui conduiſent à de telles équations, dont la doctrine des hazards eſt principalement remplie, comme je me propoſe de le faire voir une autre fois, en appliquant à cette eſpéce de calcul la théorie que je viens d'expliquer.

Digitized by Google

JOHANNIS FRANCISCI CIGNA

De Analogia Magnetiſmi, & Electricitatis

DISSERTATIO.

Magnetica phaenomena ad electrica pertinere etiam ante inventam electricitatis theoriam ingenioſi Viri conjectarunt, quod utrimque attractionis motus, & repulſionis obſervarent, atque adeo analogia ducti ex eodem fluido excitari arbitrarentur, quod in electricis quidem in ſenſus incurreret, in magneticis autem occulte actionem ſuam exerceret: quae porro opinio, etſi ab aliis, iiſque Clariſſimis Viris impugnata fuerit, nuper tamen per immortalia electrica inventa reſtituta eſt, ac illuſtrata. Cum in eam rem meditarer, nonnulla occurrebant, quae ut analogiam magnetici, & electrici fluidi confirmare, ita identitatem dubiam reddere poſſe videbantur, quae quamquam obvia ſunt, cum tamen magna ex parte hactenus non ſint animadverſa paullo fuſius exponenda eſſe duxi.

1. Corpora inaequaliter electrica ſe attrahunt, aequaliter ſe repellunt, eodem modo poli magnetici diverſi nominis ſe attrahunt, ejuſdem ſe repellunt (*a*).

2. Motus electrici non contingunt, niſi corpora actu electrica fuerint *inſulata*, magnetici motus perpetuo contingunt, ergo magnes perpetuo *inſulatus* eſt.

3. Corpora actu electrica movent corpora deferentia, ſeu eadem attrahunt, magnes ferrum attrahit; ergo ferrum eſt inſtar corporis deferentis.

4. Prae-

(*a*) Obſervante Cl. D. Alibardo in addit. ad FrancKlini epiſt. t. 2. p. 208.

4. Praeterea magnes in ferrum agit ad ingentem diſtantiam, ſi ferrum aliud teres, nec nimis magnum fuerit interpoſitum, eodemque demto ad tantam diſtantiam magnetis actio non amplius extenditur; ergo ſi magnes tamquam corpus conſideretur electricum fluidum emittens, vel recipiens, ferrum conſiderari poterit tamquam corpus deferens; atque ideo magnes eſt inſtar globi vitrei emittentis; vel reſinoſi recipientis, ferrum eſt inſtar catenae tranſmittentis.

5. Hoc tamen diſcrimen intercedit, quod globus vitreus, vel reſinoſus electricum fluidum non recipiat, aut emittat, niſi fricetur, magnes quocumque tempore abſque ulla praeparatione recipiat, & emittat.

6. Melius itaque comparari poterit cum metallo electrico aëri expoſito, quod perpetuo electricum eſt ob majorem metalli reſpectu electrici fluidi, quam aliorum corporum permeabilitatem, ob quam electricum fluidum in minus reſiſtens metallum, faciliuſque permeabile continuo fertur: corpora adeo omnia, quibus magnes inſiſtere poteſt perfecte non coërcent magneticum fluidum, ſed tantummodo minus facile ab eodem permeantur, quam ferrum, aut alius magnes; praeterea vero corpora deferentia electricum fluidum illud ad remotiſſima intervalla transferre poſſunt, ſi corporibus rite coërcentibus confinia ſint; ferrum magneticum fluidum, nonniſi per certum intervallum defert ſenſim debilius (*b*). Ergo nec ferrum perfecte deferens, nec reliqua corpora perfecte coërcentia ſunt.

7. Si corporibus deferentibus corpora actu electrica contigua fiant, electricum fluidum per ipſa diſtribuitur, & eorum vis electrica hebeſcit. Eodem modo ingens ferri maſſa

(*b*) Actio enim magnetis, quae per interpoſitum ferrum propagatur, aucta diſtantia per gradus minuitur. Muſchem. diſ. de magn. exp. 52. p. 112. Ex hoc fere fonte reliqua hauſi, quae ad magneticorum phaenomenorum hiſtoriam ſpectant.

Digitized by Google

maſſa magneti propinqua ipſius actionem in admotum ferrum imminuit, aut etiam extinguit.

8. Ex hac porro explicatione intelligitur, cur ferrum interpoſitum, quod actionem magnetis ad majora intervalla extendit, ſi ſit exiguum (4), ſi ingens ſit, eamdem tollat, quod poſtremum quibuſdam Phyſicis impoſuerat, putantibus ideo ferrum magnetis actionem intercipere ex eo, quod magneticum fluidum difficilius per ipſum permearet (*c*). Enim vero non ideo intercipit actionem, quod difficilius permeari poſſit, ſed quod facilius permeabile, ſi ingens ſit, fluidum magneticum retineat, & *inſulationem* auferat, non ſecus ac corpora electricum fluidum deferentia corporibus actu electricis contigua, ſi ingentia ſint *inſulationem* tollunt, & electricos motus extinguunt. Ex his intelligi poteſt, cur magnes albi ferri laminae applicitus, ferri limaturam in ipſius margine poſitam non attrahat, ſi lamina ampla ſit, ſin autem ſit anguſta, ad eam diſtantiam commoveat, ad quam demta lamina commovere nullatenus potuiſſet; cur item ſcobs ferri albi ferri folio ſuperpoſita a magnete ad oppoſitam folii ſuperficiem admoto eo validius commoveatur, quo folium fuerit arctius.

9. Ut autem eo evidentius pateret ferrum non minus, quam reliqua corpora magnetico fluido permeari ſequens experimentum inſtitui. Acum ferream ex praelongo filo ferreo ſuſpendi, dein enſem ad apicem magnetiſmo imbutum ad eamdem admovi, & aeque vividas acus motiones obſervavi, ac quando alio corpore acus ſuſtentabatur; quo in experimento, quum acus ferro fulciretur, & apex enſis magnetiſmo imbutus cum enſe reliquo magnetiſmo deſtituto continuaretur; luculenter conſtat utrumque corpus optime *inſulatum* futurum fuiſſe; ac proinde motum nullum fuiſſe ſecuturum, ſiquidem ferrum magneticum fluidum coër-

(*c*) Vid. Mémoir. de l'Acad. 1733.

Digitized by Google

coërceret, caeterum reſpectu magnetici fluidi ferrum vices praeſtare corporis deferentis evidentius conſtabit inferius, ubi de armatura magnetis ſermonem habebo.

10. Corpora electrica ſe attrahunt, quando ex his alterum fluidum electricum emittit, alterum recipit, ſe repellunt, quando vel utrumque emittit, vel utrumque recipit, nempe ſe attrahunt, quando eadem directione per ipſa fluidum electricum movetur; ſe repellunt, quando movetur directione oppoſita. Quoniam igitur poli magnetici ejuſdem nominis ſe repellunt, nominis diverſi ſe attrahunt horum unum magneticum fluidum recipere, alterum emittere cenſendum eſt; inde intelligitur cur electrica corpora ſe non repellant, niſi aequaliter electrica fuerint; contra poli ejuſdem nominis ſe repellant, etſi inaequalem habuerint magnetiſmum; nempe in corporibus electricis, ut contraria ſit electrici vaporis directio, non ſufficit, ut eodem modo ſint electrica, ſed praeterea neceſſe eſt, ut ſint electrica aequaliter, contra in polis magneticis ſufficit, ut ſint ejuſdem nominis, ut contraria quoque ſit magnetici fluidi directio.

11. Electrica porro corpora poſtquam ſe attraxerunt, ſe repellunt, quod cum prius horum alterum ex altero electricum fluidum reciperet, paullo poſt aequaliter electrica facta, vel ambo recipiunt, vel ambo emittunt. Contra magnes conſtanter ferrum attrahit, & polus magneticus polum item diverſi nominis conſtanter attrahit, ejuſdem conſtanter repellit. Ergo per magnetem, & ferrum conſtanter eadem directione magneticum fluidum movetur, tum etiam per polos diverſi nominis, per polos ejuſdem nominis diverſa (*).

12.

(*) Lex illa motuum electricorum, quod corpora inaequaliter electrica ſe attrahant, aequaliter electrica ſe repellant eatenus vera eſt, quatenus fluidum electricum per corpora communicatione electrica ad aequalitatem diſtribuitur, ac proinde, quando bina corpora aequaliter electrica facta ſunt ab uno in alterum fluere deſinit, ſed vel in utraque ingredi, vel

Digitized by Google

12. Propterea polus unus magnetis conſtanter magneticum fluidum recipit, alter conſtanter emittit, non ſecus, ac in electricis machina vaporem recipit, catena emittit, vel contra, quamdiu globus circumducitur.

13. Quemadmodum igitur in electricis, ſic in magneticis, nulla neceſſitas duplicis fluidi affluentis, & effluentis, quale a Carteſio fuerat propoſitum (*d*).

14. In locis reliquis magnetis extra polos, quoniam vis magnetica exigua eſt per eadem, nonniſi exigua quantitate magneticum fluidum movetur, atque adeo a polo ad polum fertur; inde autem intelligitur cur ſi tranſverſim magnes ſecetur, plana, quae ſectione gignuntur polos diverſi nominis exhibeant (*e*); cum etenim ex uno in alterum magneticum fluidum ante ſectionem moveretur, etiam poſt ſectionem planum unum magneticum fluidum emittet, alterum recipiet, ac propterea tamquam poli diverſi

ab utriſque egredi nititur pro ut poſitivam, vel negativam habuerint electricitatem: at ſi quaeſtio ſit de motibus inter corpora deferentia, & coërcentia ſibi invicem admota, quoniam in his lex illa aequabilis diſtributionis non obtinet, nec etiam ea motuum regula obtinebit. Vitrum tenue, aut talci folium ex ſerico filo pendulum, ita admoveo corpori metallico catenae electricae adnexo, ut plana vitri ſuperficies ejus corporis ſuperficieì obvertatur ad aliquot pollicum diſtantiam. In eadem diſtantia ad oppoſitam vitri faciem colloco corpus deferens cum ſolo communicans: vibrat vitrum inter catenam, & corpus deferens oppoſitum; nempe dum ſuperficies vitri catenae obverſa electricum vaporem recipit, vitrum ad catenam fertur, dum oppoſita vitri ſuperficies aequalem vaporis quantitatem exonerat in adpoſitum deferens corpus verſus illud movetur. Apicem metallicum corpori huic ſubſtituo, ut ad majorem diſtantiam electricum fluidum haurire poſſit ex vitri ſuperficie, vitrum conſtanter adhaeret corpori catenae adnexo; dum enim apex metallicus eo una vitri ſuperficie vaporem haurit, ex catena in oppoſitam ſuperficiem idem vapor fluere pergit, ex quo vaporis ex uno corpore, in alterum corpus conſtanti fluxu adhaeſio illa conſtans producitur: ergo ſuperficies vitri ad catenam converſa aequaliter, imo magis electrica evadit quam catena ipſa, & tamen catenae conſtanter adhaeret, quando conſtans eſt electrici vaporis ex catena in illam ſuperficiem effluxus. En igitur etiam in electricis exemplum adhaeſionis conſtantis ad ſimilitudinem magneticae attractionis.

(*d*) Confer Regnault entretien 15. n. 3. 6.
(*e*) Muſchenb. diſ. de magn. exp. 83. pag. 139.

verſi nominis erunt ſpectanda (11): ſin autem plano ad axim paralello magnes ſecetur, extrema, quae prius cohaerebant, ſe repellent, quod poli ejuſdem nominis remaneant (*f*).

15. Quoniam ferrum a polis diverſi nominis aeque attrahitur, neceſſe eſt, ut a polo fluidum emittente idem accipiat, & ad polum recipientem idem traducat, ut adeo aequali facilitate quacumque directione a fluido magnetico poſſit permeari.

16. Ferrum porro ex magnetis contactu, multo magis ex magnetici poli juxta ipſius longitudinem ductu, magneticum evadit, etiamſi pannus hoc inter, & magnetem fuerit interpoſitus (*g*). Ergo ubi ſemel per ipſum certa directione magneticum fluidum moveri coepit, eamdem deinceps affectare pergit. Inde fit, ut qua parte ferrum magneticum polum tangit, diverſi nominis polum acquirat (*h*); ſi polo debilioris magnetis aptetur polus diverſi nominis magnetis validioris, illius virtus augeatur (*i*), ſi polus ejuſdem nominis debilitetur, deſtruatur, in contrariam mutetur (*K*), ut demum magnetici poli ejuſdem nominis vim ſuam ex vicinia perpetuo imminuant, nominis diverſi ſervent, adaugeant in ratione aliqua diſtantiarum inverſa (*l*).

17. Quod autem diximus ferrum quacumque directione aeque facile a magnetico fluido permeari (15), magnetem nonniſi certa directione (11), ulterius comprobatur, obſervando polum magneticum, qui ex validiore polo ejuſdem nominis in contrarium mutatur (16), antequam mutetur, omnem magnetiſmum amittere, ac proinde in ferri conditionem redigi: cum igitur ſimplicis ferri conditio ſit veluti gradus, quo

(*f*) Id. l. c. exp. 80. pag. 140.
(*g*) Muſchenb. l. c. pag. 100.
(*h*) Rohaul. pag. 244. n. 8. Muſchenb. exp. 89. pag. 141.
(*i*) Muſchenb. l. c. exp. 89. pag. 141.
(*K*) Muſchenb. l. c. exp. 119. pag. 243.
(*l*) Encyc. ex Mitchelio, Article aiman.

Digitized by Google

quo a polo uno in contrarium fit tranſitus, quando contrarias directiones magneticum fluidum affectat (10), neceſſe eſt, ut ferrum ipſum indifferens ſit ad utramque; atque adeo ad quamcumque magnetici fluidi directionem. Praeterea vero ferrum magnetiſmo imbutum, & magnes ipſe diuturna ignitione vim attrahendi amittunt (*m*), & vim directivam, aut nullam, aut exiguam retinent (*n*), cum tamen poſtquam refrigerata fuerint aeque valide a magnete alio attrahantur (*o*), quod nempe vi ignis, magnete, & ferro mollibus factis fluidum magneticum aeque facile quacumque directione aditum ſibi comparet, ſicque ipſa (ſi ſatis diuturna fuerit ignitio) in merum ferrum redigat, quod attrahi quidem a magnete poſſit, ferrum vero aliud attrahere non poſſit, ſin autem ignitio breviori tempore perduret, tum frigefacta vim duntaxat aliquam attractivam ſervabunt, quae jugi magnetici fluidi juxta priſtinam directionem fluxu augeri poterit, ac reparari (*p*): magnetem vero, & ferrum ex igne mollia magnetico fluido quavis directione in ipſa incurrenti facilius cedere, quam ſi frigida fuerint experimenta alia inferius adducenda comprobabunt.

18. Corpora contrario modo electrica ad majorem diſtantiam in ſe agunt, quam in corpora deferentia electricitate deſtituta (*q*). Ita ferrum magnetiſmo imbutum ad

 ma-

(*m*) Muſchenb. diſ. cit. exp. 29. pag. 71. 72. magnetem, qui per ſex horas canduerat, nequidem ſcobis ferri particulam elevare potuiſſe, & Boyleus apud eumdem pag. 262.

(*n*) Magnes modo dictus in Muſchenb. exp. acum mobiliſſimam ſex polic. longam nonniſi ad diſtantiam $\frac{1}{2}$ polli attrahebat, ac repellebat; ferrum ignitum minorem adhuc vim directivam oſtendebat exp. 131. pag. 234.

(*o*) De magnet. conf. exp. cit., de ferro autem dum candet minori vi a magnete attrahi Muſchenb. diſ. cit. exp. 23. pag. 55. 56. vi aequali Monier Encyc. l. c. contendit; conſentiunt tamen poſtquam fuerit refrigeratum priſtina vi magneti adhaeſurum.

(*p*) Quod contigiſſe videtur in exp. Monierii loc. cit.

(*q*) Cl. Beccaria *dell' elettriciſmo artif.* § 68.

majorem diſtantiam in polum diverſi nominis agit, quam in ferrum magnetiſmo deſtitutum (*r*).

19. Foliola metallica ad corpus actu electricum celerius feruntur, ſi deferente corpore, quam ſi coërcente ſuſtineantur (*ſ*). Ita ferrum validius magneti adhaeret, ſi ferrum, quam ſi aliud quodvis corpus ſuppoſitum fuerit (*t*).

20. Ex eodem principio fit, ut ferrum nimis breve minorem ex affrictu magnetiſmum ſuſcipiat, admoto in extremitate ferro alio majorem (*u*); majorem iterum ſi ex utroque extremo ferrum fuerit àdmotum (*x*); majorem denique, quo admota in extremitatibus ferramenta iiſdem fuerint propinquiora (*y*), eo nempe major ex affrictu vis excitatur, quo facilius per unum extremum magneticum fluidum ingredi poteſt, per alterum egredi, facilior autem ingreſſus, egreſſuſque paratur admotis ferramentis, eoque facilior, quo proximius admoventur.

21. Ex eadem electricitatis analogia corpora deferentia electricum fluidum, ſi levia ſint, ac mobilia, ita diſponuntur, ut viam faciant inter corpora idem recipientia, & emittentia (*z*). Ita ſcobs ferrea circa magnetem poſita in arcus diſponitur, quorum extrema utrumque polum attingunt (*a*).

22. Supra dictum eſt magnetem, nonniſi certa directione a magnetico fluido permeari (11. 17.); inde fit, ut per polorum ſuperficies fluere, ac ſimul colligi fluidum illud non poſſit; eodem modo, quo electricum fluidum per vitro-

(*r*) Muſchenb. cor. 3. pag. 45. diſſ. cit.
(*ſ*) Nollet eſſai ſur l'electric.
(*t*) Reaumur mémoire de la Acad. 1725.
(*u*) Encyc. l. c.
(*x*) Si plures virgae aequales, & ſimiles in longum diſpoſitae magnete fricentur, quae mediae ſunt, maximam vim aquirunt. Encyc. l. c.
(*y*) Muſchenb. exp. 53. pag. 112. diſ. cit.
(*z*) P. Beccaria in epiſ. ad Cl. Beccarium.
(*a*) Rohault. pag. 268. n. 24. Muſchenb. diſ. cit. exp. 66. pag. 121., & exp. 117. pag. 242.

trorum ſuperficies fluere nequit. In electricis vitrum corpore aliquo deferente tegitur, quo vapor electricus colligi poſſit; ita, & in magneticis ſuperficies polorum bracteis ferreis teguntur (quod unum corpus reſpectu fluidi magnetici (4) deferens eſt), ut ſimiliter fluidum magneticum per eaſdem fluere, ac ſimul colligi poſſit; in utriſque ea operimenta ex corporibus deferentibus armaturae vocantur (*b*).

23. Verumtamen non ſufficit, ut vapor magneticus per armaturam ferream fluere queat, ſed praeterea neceſſe eſt, ejus motum omnem ad certam plagam determinari, ut ibidem colligi, & condenſari fluidum illud poſſit; propterea ferreae laminae armaturam conſtituentes pedem ferreum continuum habent, qui ſub magnetem extenditur, & fertur verſus pedem alterum ab oppoſiti poli lamina ſimiliter productum; ita enim magneticum fluidum per unam laminam effluens ad pedem accurrit, unde faciliorem, brevioremque viam invenit, ut ad pedem alterum regrediatur; non ſecus ac, ſi alicubi machinae electricae partes catenae partibus fuerint viciniores, ad eam viam percurrendam omnis vapor electricus determinatur, quod per eam viam minimam reſiſtentiam inveniat (*c*).

24. Cum armatura colligat fluidum per polorum ſuperficies fluens (22), intelligitur cur eo pacto magnes majori ferri ponderi ſuſtentando aptus evadat (*d*); cur item armatus magnes majorem magnetiſmum ferro communicare valeat, quam non armatus (*e*); cur demum magnetis armati virtus, cæteris paribus, ſit in ratione ſuperficierum polarium (*f*).

g 2 25.

(*b*) Haec comparatio ab Illuſtri FranKlino propoſita fuit epiſ. 4. ad Collinſonium §. 1.
(*c*) P. Beccaria §. 58.
(*d*) Muſch. diſ. cit. exp. 74. p. 132. 133.
(*e*) Id. l. c. exp. 76. p. 133.
(*f*) Id. exp. 79. p. 135.

Digitized by Google

25. Quod autem ex armaturae pedum vicinia magneticum fluidum determinetur, ut ab altero in alium fluat (24), ulterius confirmatur obſervando ex armatura ſphaeram activitatis magnetis imminui (*g*), tum armaturam ipſam oppoſita pedibus parte minimam vim poſſidere, ac demum armaturae crura, dum verſus pedem protenduntur, & proinde majorem magnetici fluidi copiam transferre debent, craſſiora etiam fieri debere (*h*).

26. Conjecturam itaque feci vim armaturae crurum auctum iri, ſiquidem fluxus magnetici fluidi ab uno ad alterum pedem interciperetur, de qua re ut certior fierem, polum cognominem aequalis propemodum virtutis ad armaturae pedem admovi, & revera deprehendi eo pacto illius armaturae crura, tum ad majorem diſtantiam, tum majori virtute ferrum attraxiſſe: polus diverſus admotus contrarium praeſtitit effectum.

27. Ideo ferrum a magnete attrahi propoſueram, quod ferrum reſpectu fluidi magnetici corpus deferens ſit (3), id vero ex eo confirmatur, quod ferrum molle, & armaturae aptius, proindeque magnetico fluido colligendo magis idoneum validius etiam magneti adhaereat; ferrum item phlogiſtico deſtitutum, & armaturae ineptum debiliſſime a magnete attrahatur (*i*).

28. Ex hac ipſa obſervatione confirmatur, quod ſuperius indicavimus (16) ferrum magneticum effici ex magnetici fluidi fluxu per ipſum certa directione fluentis; quo enim ferrum durius eſt, atque adeo ex §. praec. difficilius a magnetico fluido permeatur, eo etiam difficilius, tardiuſque magneticam vim acquirit (*K*).

29.

(*g*) Id. exp. 77. p. 134. Encyc. l. c.
(*h*) Id. Eſſai. de phyſ. §. 556.
(*i*) Muſch. Eſſai. §. 555. 557. Idem ex eo, quod fluido magnetico chalybs difficilius pervadatur majori vi ab eodem contra magnetem impulſum iri concludit, unde contra magnetici fluidi exiſtentiam argumentum deſumit §. 787. p. 313. Confer. etiam eumd. in diſ. cit. exp. 33. 39. pag. 127.
(*K*) Encyc. *l.* c.

Digitized by Google

29. Quando inter corpora poſitive, & negative electrica corpus deferens aptatur validius utriſque id corpus adhaerebit, quam ſi alterutro tantum admoveretur, imo majus pondus eo pacto machina, & catena ſimul elevare poterunt, quam ſi ſeorſim in corpora ſejuncta actionem ſuam exercerent; interea tamen fluidum electricum per corpus deferens appoſitum a catena in machinam redibit, ſicque exteriora electricitatis ſigna extinguentur. Ita ferrum tranſverſim a polo ad polum magnetis traductum, & majus pondus ſuſtinere valet, quam bina ferri fruſtra ſeorſim polis appenſa, & interea ab uno ad alterum polum fluidum magneticum revehit, ſicque ſphaeram activitatis magnetis in reliqua exteriora corpora imminuit, ac ferme extinguit (*l*).

30. Idipſum ferrum magnetis virtutem conſervat, reſtituit, dum magnetico fluido certa directione fluenti liberiorem viam praebet, magiſque expeditam, ex cujus fluidi certa directione per ferrum, & magnetem fluxu ipſorum vim naſci, ſervari, augeri ſuperius innuimus (16). Aſſerti veritatem confirmant annuli chalybei, qui etiam ea directione ſiti, quae ſpontaneae directioni ſit oppoſita magnetiſmum non amittunt, quin imo ex contrario magnetis affrictu aegrius virtutem deperdunt, & licet aliquando amiſiſſe videantur paullo poſt eamdem recuperant (*m*).

31. Muſchenbroeckius obſervavit, quod ſi magnes ſuſpenſos retinere poſſit aliquot annulos ferreos ſibi invicem admotos, unus autem ex iis ita ſuſpendatur, ut utrumque armaturae pedem ſimul tangat, tunc hunc unum ſuſtineri, reliquos decidere (*n*); ego vero generatim ſum expertus magnetem armatum, qui exteriore unius pedis parte tres claves facile ſuſtentabat, nec unicam ſuſtinere potuiſſe,

quan-

(*l*) Muſch. diſ. cit. exp. 77.
Encyc. l. c.

(*m*) De la Hire phil. tranſ. n. 188.

(*n*) Exp. 75. p. 173. diſ. cit.

quando ipſarum altera utrumque pedem tangebat: ratio autem perſpicua eſt ex §. 29., quod ſcilicet in poſtremo caſu magneticum fluidum, per appoſitam clavim ab uno in alium pedem traductum per magnetem ipſum circumiret, atque adeo minorem in ferrum extrinſecus admotum actionem exercere poſſet; nil igitur ſingulare eſt in Muſchenbroeckii experimento, nec opus eſt cum eodem confugere ad ferri figuram, ut phaenomeni ratio eruatur; ex eadem ratione intelligi poteſt, cur pes unus magnetis contra albi ferri laminam applicitus multo validius, & copioſius ferri limaturam margini circumpoſitam alliciat, quam ſi ambo armaturae pedes ipſi laminae aptentur; in primo nimirum caſu magneticum fluidum per ferri laminam effuſum ad ipſius margines copioſius pervenit, quam in altero, quando per laminae portionem pedibus interjectam ad ſocium pedem faciliorem invenit regreſſum.

32. Quo vis magnetis major, eo armatura craſſior eſſe debet (*o*), ut, & ferrum tranſverſim adhaerens (29); crura item armaturae dum majorem magnetici fluidi quantitatem ſucceſſive verſus pedes recipiunt, ſucceſſive etiam craſſeſcere debent (25): ergo ferrum nonniſi certam magnetici fluidi quantitatem tranſmittere commode poteſt, cum corpora electricitatem deferentia maximam facillime ferant.

33. Electricitas catenae fortior erit ſi machina corporibus perfecte deferentibus, quam ſi imperfecte deferentibus ſuffulta ſit, & viciſſim machinae electricitas fortior erit, ſi catena perfecte, quam ſi imperfecte deferentibus corporibus ſuffulciatur: ſimiliter vim unius poli majorem fuiſſe deprehendi (*p*), quando oppoſitus polus praelongum ferrum contiguum habebat, quod praeſtantiſſimum deferens corpus eſſe demonſtravimus (27).

34.

(*o*) Id. Eſſai §. 554.
(*p*) Id ipſum a Savery fuerat obſervatum vid. Sag. delle tranſ. filoſof. del Cavaliere Dereham t. 5. p. 100. §. 26.

Digitized by Google

34. Si folium auri verſus catenam apicem ſuum dirigat, atque inter hoc, & catenam tranſverſim metallum mucronatum admoveatur, bracteae apex eam directionem amittet; ſic dum acus ex ſuperpoſito magnete ſupra tabulam erigitur, ſi alia inter illam, & magnetem admota fuerit, prima ſtatim decidet. En igitur phaenomeni explicationem, quod omnes fluidorum currentium leges reſpuere Muſchenbroeckius affirmat, ex quo concludit magnetem non operari effluviis, aut fluido quocumque alio (*q*).

35. Bina fila ex catena, vel machina actu electricis pendentia a ſe mutuo recedunt (*r*). Ita binae acus apicibus ſuis ex utrovis magnetis polo pendentes invicem divergunt. 2. Angulum eo majorem fila electrica conſtituunt, quo major eſt electricitas (*ſ*). Ita acus angulum majorem conſtituent, ſi ex admoto polo validiore ejuſdem nominis, poli ſuſtinentis magnetiſmus augeatur, ad paralleliſmum accedunt, ſi admoto ferro, multoque magis ad oppoſitum polum traducto (29), ejuſdem magnetiſmus minuatur. 3. Fila electrica magis divergunt ſi ipſis admoveatur corpus deferens (*t*). Ita acus ex admoto ipſis ferro majorem divergentiam acquirunt. 4. Si filum ad contactum corporis deferentis perveniat, ipſi adhaeret (*u*). Ita ſi acus ferrum attingat, cum eodem jungitur. 5. Quod ſi fila inter bina corpora aequaliter electrica poſita ſint parallela evadunt (*x*). Ita ſi acus inter polos cognomines pendeant ipſarum divergentia minuitur, aut penitus aufertur. Cavendum autem eſt in hiſce experimentis, ne acuum, quae adhibentur, extrema magnetiſmo, ac praeſertim contrario imbuta ſint, quod eorum experimentorum eventum perturbare poſſet.

36.

(*q*) Diſſert. exp. 54. p. 113.
(*r*) Beccaria §. 94. n. 1.
(*ſ*) Ibid. n. 2.
(*t*) Ibid. n. 3.
(*u*) Ibid. n. 4.
(*x*) Ibid. n. 5.

Digitized by Google

36. Si maximum ferri pondus, quod a magnetis polo ſuſtentari poteſt eidem appenſum ſit, admoto polo diverſi nominis alterius magnetis appenſum ferrum decidet, ſi vero ejuſdem nominis polus alterius magnetis admoveatur ad eam diſtantiam, ad quam eumdem repellit, ferrum non modo non decidet, verum etiam aliquot alia ponduſcula ipſi appenſa ſuſtentabit, quod ſcilicet in primo caſu liberiori facta via fluido magnetico per datum polum fluenti ejuſdem affluxus per appenſum ferrum minuatur, in altero impedito fluidi magnetici tranſitu, a fluido contraria directione fluente, id majori copia per appenſum ferrum moveri cogatur, quod apprime congruit cum iis, quae §. 26. propoſuimus, ex quibus ea lex erui poteſt polos ſe attrahentes vim ſuam in ferrum extrinſecus admotum imminuere contra dum ſe repellunt majori vi ferrum extrinſecus poſitum allicere.

37. Docent nonnulli armaturae pedes validius attrahere interna parte, quam externa. Id verum eſſe tantummodo videtur, quando utriuſque pedis externae, internaeve partes ſimul agunt, per ferrum tranſverſum iiſdem applicitum (29), falſum quando agunt ſeorſim; nam in primo caſu fluidum, quod ad vicinum polum copioſius accurrit, per ferrum attractum tranſit (§. cit.), ſecus ac in altero caſu contingat (§. praeced.).

38. Docent etiam, ſi pedes armaturae introrſum ſub magnetem vergant validius attrahere, quam ſi vergant extrorſum, quod iterum verum dumtaxat eſſe videtur, quando utroque pede ſimul utimur; nam ſi unico pede utamur, is eo debilius adhaerens ferrum ſuſtentabit, quo proximior erit pedi alteri, ad quem divertere poteſt magneticum fluidum.

39 Quando unico pede utimur majus ferri, quam alterius corporis pondus ſuſtentabit, quando utroque majus alterius corporis quam ferri. In primo enim caſu copioſius

ad

Digitized by Google

ad ferrum, quam ad aliud corpus, fluidum affluet, in altero dum per ferrum diffunditur tanta copia in oppoſitum polum non redibit.

40. Acuminata porro corpora majori copia electricum fluidum recipiunt, & emittunt (*y*); idipſum in magnetico obtinere videtur: extremitates enim conicae cylindrorum, qui magnetiſmo imbuti fuerunt pondus ferreum multo gravius ſuſtinent, quam plana eorumdem baſis (*z*), & limatura ferri copioſius magnetis, vel magnetici ferri angulis adhaeret, quam planis eorumdem ſuperficiebus (*a*), & anguli armaturae (.22) externi, ſi acuti fuerint vim magneticam imminuunt, ac diſperdunt (*b*), non ſecus, ac metallicus apex catenae, aut machinae adnexus electricam vim imminuit (*c*), & acutum demum ferrum ex affrictu, contra ferrum, aut rigidum aliud corpus, majorem, quam planum ferrum virtutem acquirit (*d*).

41. Cum autem ad eamdem diſtantiam magnetis actio extendatur, ſive corpora, quaevis fuerint interpoſita, ſive nullum corpus intercedat (*e*), inde conjectabam aërem non minus, quam corpora reliqua, fluidi magnetici expanſioni reſiſtere, ac propterea coërcentis corporis vicem praeſtare, qualem aëris reſiſtentiam reſpectu electrici fluidi experimenta demonſtrarunt (*f*). Quamquam enim interpoſitam flammam electrici vaporis actionem ad longinquius intervallum extendere noviſſem (*g*) imminuta, ut puto, aëris reſiſtentia, magnetici non item (*h*), quamquam

h ma-

(*y*) FranKlin. epiſ. 1. §. 17.
(*z*) Muſchenb. diſ. pag. 97.
(*a*) Id. l. c. exp. 64. pag. 118., & exp. 116. pag. 241.
(*b*) Ideo in rotunditatem ſecondos eſſe monet idem Muſchenb. Eſſai de Phyſiq. §. 556.
(*c*) FranKlin. epiſ. 6. §. 76. P. Beccaria §. 191. 232.
(*d*) Muſchenb. diſ. cit. exp. 245. pag. 268.
(*e*) Saggi di naturali eſperienze intorno alla calamita, eſp. 1. & 2. Muſchenb. diſ. cit. pag. 59. & ſeq.
(*f*) FranKlin. epiſ. 2. §. 22.
(*g*) P. Beccaria §. 457.
(*h*) Muſchenb. diſ. cit. exp. 28. pag. 70.

Digitized by Google

magnetem in vacuo boyleano idem ferri pondus geſtare, quod in aperto aëre compertum habuiſſem, quamquam magnetem in aëre conſtitutum magnetem alium ad datam diſtantiam aequali vi attrahere meminiſſem, ſive is in vacuo, ſive in aëre collocaretur (*i*); hiſce tamen experimentis non acquieſcebam, ex eo vel maxime, quod ferrei apices majori copia magneticum fluidum, & emittant, & recipiant (40), ac ſimilis apicum proprietas in electricis ex aëris reſiſtentia in primis naſcatur (*K*), etſi in vacuo adhuc obtineat (*l*). Sequens igitur in eam rem experimentum inſtitui. Sub campanam pneumaticam ferramentorum congeriem collocavi, & in ſuprema recipientis parte notam appoſui, ut ad idem punctum ſemper magnetis polum aptarem, dein ex oppoſita recipientis parte ad eamdem notae altitudinem acum nauticam collocavi, & tentando diſtantiam maximam inveni, ad quam acus illa nautica a magnete ad notam appoſito commoveri poſſet; poſtremo aërem exhauſtavi expectans futurum, ut magnetis actio ad acum uſque pervenire amplius non poſſet; ſiquidem aër magnetico fluido reſiſtentiam faceret; enim vero ablato aëre reſiſtentia minui ſimiliter debuiſſet fluido ad ſuppoſita ferramenta tendenti, hacque ratione aucto ejuſdem fluidi ad ea ferramenta affluxu id ab acu averti debuiſſet; perinde ac catena electrica, cujus extremum per verticem recipientis pneumatici traducitur corpora extrinſecus poſita ad datam diſtantiam agitat, quamdiu aër prohibet ne electricum fluidum in ſubjectam lancem fluere, ac diſperdi poſſit, ablato autem aëre, & liberiori parata via electrico fluido ad lancem tendenti catenae actio in exteriora corpora extinguitur (*m*). Sed nihil hujuſmodi obſervare con-

(*i*) Id. diſ. cit. exp. 25.
(*K*) P. Beccaria §. 217. 218. & ſeq.
(*l*) Id. §. 235.
(*m*) Conſule Beccariam §. 124.

Digitized by Google

contigit, cum ad eadem diſtantiam magnes in acum ageret, ſive vacuum recipiens eſſet, ſive aëre plenum, ex quo proclive erat concludere per ſpatia aëre vacua aeque difficulter magneticum fluidum moveri, ac per corpora alia quaevis excepto ferro. Quantum porro firma eſt hujus experimenti veritas, tantumdem erroribus obnoxiae eſſent hypotheſes, quae ad id explicandum excogitari poſſent; ſatius igitur erit conſectaria quaedam adnotare; ſcilicet 1. Vapor electricus, dum ex corpore in corpus tranſit ſtridorem edit, magneticus non item 2. Corpora actu electrica auram quamdam excitant, magnetica nil ſimile praeſtant. 3. Interpoſita ut diximus flamma electricam atmoſphaeram ad majus intervallum extendit, magneticam non mutat, quae omnia ex memorata aëris reſiſtentia intelligi poſſe videntur, quae, cum reſpectu electrici fluidi ingens ſit, magneticum non afficiat.

42. Diximus polos ejuſdem nominis utcumque inaequaliter magneticos, tamen ſe repellere (10); id in majori aliqua tantum diſtantia verum eſt, namque in minoribus diſtantiis, non modo vis repulſiva non augetur, ſed minuitur, & tandem in attractivam mutatur, eoque citius, quo virium differentia major eſt: tamdiu nempe ſe repellunt, quamdiu fluidum magneticum per utroſque contraria directione movetur, contraria autem directione movetur, quamdiu polus debilior in tanta diſtantia ab actuoſiori conſtituitur, ut fluidum ab actuoſiori emanans ac in debilius irruens, per debiliorem polum eadem directione non feratur, tunc enim juxta ſancitam motuum legem (10), vis repulſiva in attractivum mutabitur; & revera, quando ad polum dati nominis ejuſdem nominis polus validior admovetur in diſtantia adeo exigua, ut eumdem attrahat tardius, vel citius polus debilior in contrarium mutatur (16), quod demonſtrare videtur magneticum fluidum a validiore magnete erumpens alterius fluidi a debiliori polo contraria

directione effluentis reſiſtentiam viciſſe, & propria directione per ipſum permeaſſe (§. cit.): imo vero caeteris paribus eo citius debiliori poli virtus mutatur, quo inter ipſius vim, & vim validioris major differentia intercedit, & quo magis ad ſe mutuo admoventur (§. cit.); attractio autem polorum cognominum in data diſtantia eo item major exiſtit, quo virium differentia major eſt, & imminuendo ſenſim diſtantias vis repulſiva eo citius in attractivam mutatur, quo virium differentia major, eo tardius, quo minor exiſtit, quemadmodum ſequentibus experimentis comprobavi.

1. Poli magnetici debilioris virtutem adhuc imminuebant per ferrum tranſverſum eidem admotum (30), tum vero polus validior ejuſdem nominis ad exteriorem illius partem admotus longe fortius adhaerebat, quam ſi nullum hujuſmodi tranſverſum ferrum adfuiſſet, unde patet in contactu polorum ejuſdem nominis attractionem augeri, ſi debilioris poli virtute imminuta, virium differentia augeatur.

2. Quod ſi ferro tranſverſo non debilioris poli, ſed robuſtioris vim imminuerem, tunc attractiones in contactu ſimiliter minui obſervabam, imminuta virium differentia.

3. Ad apicem acus magnetiſmo imbutae, & per filum libere ſuſpenſae polum magneticum ejuſdem nominis paullatim admovebam, & ad hujus latus ferream clavim aptabam, quando autem ad talem acus viciniam polum adduxeram, ut jam vim repulſivam in attractivam mutandam fuiſſe conjectarem, ſi clavis abfuiſſet, ipſam auferebam, eodemque, ut plurimum momento acus ad magnetem apice ſuo ferebatur, id ipſum luculentius adhuc tranſverſo ferro, aut polo diverſi nominis admoto, tum ſublato, ſicque vi imminuta, ac dein reſtituta experiri licebat, unde conſtitit polos cognomines ad diſtantiam eo majorem ſe attrahere, quo inter eorum vires differentia major intercedit.

Cum

Cum igitur eae conditiones, quae efficiunt, ut dati poli vis directiva tardius, citiuſve mutetur, eaedem efficiant, ut is a cognomine polo proximius, remotiuſve, tum validius, debiliuſve attrahatur, cumque mutata poli directio a contrario fluxu magnetici fluidi producatur (16), inde confirmari videtur repulſivam quoque vim in attractivam ob eamdem cauſſam mutari, ob ſervatam ſcilicet a fluido validioris poli per debiliorem propriam directionem (*n*).

43. Muſchenbroeckius, quando in minori aliqua diſtantia polorum vis repulſiva minuitur, aut extinguitur, non revera minui, aut extingui cenſet, ſed cum attractiva duntaxat conjugi, quae magis creſcat, quam repulſiva imminutis diſtantiis, & proinde eamdem aequet, aut ſuperet, unde, vel nulla vis repulſiva remaneat, vel etiam attractiva naſcatur (*o*). Haec vero Muſchenbroeckii ſententia confirmatur experimento 3. §. praeced., nam clavis robuſtiori polo admota debiliorem acus polum certe non repellere, ſed potius attrahere debuiſſet, & tamen repulſivam vim ſervabat, quod praeſtitiſſe videtur attractivam vim validioris poli in debiliorem, imminuendo, quae ſi integra fuiſſet repulſivam facile ſuperaſſet, atque extinxiſſet.

Quae quidem Muſchenbroeckii theoria cum principiis noſtris egregie conſentit; nam fluidum magneticum ad debiliorem polum ſpectans, & fluido robuſtioris poli reſiſtens vim repulſivam facit; exceſſus virium fluidi ad robuſtiorem polum ſpectantis, quo debilioris fluidi reſiſtentiam ſuperat, & per debiliorem polum propriam directionem ſervat, attractionem producit.

44.

(*n*) Mitchelius ideo vires repulſivas, imminutis diſtantiis, imminui cenſet, quod poli repellentis debilioris virtus imminuatur (Encyc. l. c.) ſed ſaepe obſervatur in aliqua diſtantia vim repulſivam imminui, aut etiam in attractivam mutari, etiamſi debilior polus debilitari, aut mutari adhuc non potuerit. Enim vero fluxus fluidi certa directione ſufficit ad attractionem faciendam, ut vero magnetiſmum mutet per tempus aliquod debet perdurare (16).

(*o*) De magn. exp. 15., ubi ſi attractivae vires a repulſivis ſubtrahantur has certas reciprocas diſtantiarum proportiones ſervare adnotavit.

Digitized by Google

44. Chalybis porro temperati magnetiſmo imbuti virtus caeteris paribus difficilius, quam ſimplicis ferri virtus a robuſtiori polo mutatur (*p*): An non ideo, quod difficilius validioris poli fluidum per chalybem, quam per ferrum ſibi viam faciat (28)? An non itaque debilius chalybei poli ejuſdem nominis ſe attrahere debent, & ad minores diſtantias, quam poli ferrei, ſiquidem ea, quam propoſui, theoria locum habeat? Ex eadem quoque theoria intelligitur, cur poli cognomines, quamdiu ſe repellunt ſuas vires in ferrum extrinſecus admotum mutuo augeant (36), quando vero jam repulſio in attractionem mutata eſt potius imminuant; quamdiu enim ſe repellunt fluida contraria directione lata ſe mutuo coërcent, quando vero ſe jam attrahunt a robuſtiori polo in debilius, vel contra magneticum fluidum movetur, atque adeo in primo caſu per ferramenta extrinſecus admota fluidum illud adigitur, in altero per admotum polum diſſipatur.

45. Magneticae acus directio ea eſt, ut uno extremo fluidum magneticum recipere, altero emittere quam commode poſſit, quam proprietatem electricorum corporum phaenomenis analogam eſſe ſuperius monuimus (21), inde vero fit, ut ferrum magnetiſmo deſtitutum, ſi collocetur in eo ſitu, ad quem acus ſponte ſe dirigit ex magnetici fluidi juxta eam directionem fluxu magneticum evadat (*q*), imo eamdem magneticam vim acquirat, ſi juxta lineam conſtituatur, quae meridianam magneticam ad angulum quemvis interſecet, ſed eo tardius, debiliuſque, quo angulus major fuerit, donec ad angulum 90° nullam adipiſcatur (*r*): ferrum quoque eo citius vim eam acquirit, quo longitudo majorem ad craſſitiem proportionem habuerit, & quo mollius fuerit, multoque majorem ſuſcipit, ſi candens eo in ſitu ſponte, aut aqua frigida affuſa, refrigeſcat: extre-

(*p*) Encyc. l. c.
(*q*) Muſchenb. diſ. exp. 132. pag. 216.
(*r*) Id. l. c. ab exp. 133. ad 136.

Digitized by Google

tremitas autem, qua ad polum boreum inclinat, borealem polum, qua inclinat ad auſtralem, auſtralem acquirit, & ex contrario ſitu vim priſtinam amittit, oppoſitamque adipiſcitur (*ſ*), quae omnia cum iis conveniunt, quae de magnetiſmo per magnetem inducto obſervata ſunt (16.20.) unde recte Muſchenbroeckius concluſiſſe videtur (*t*), *vim magnetis terreſtris eſſe admodum univerſalem, eam ſe extendere per totum terrarum orbem, agere in omne ferrum, id dirigere haud aliter, quam ferrum allici, regique a magnete obſervetur*.

46. Acus vero ferrea magnetiſmo deſtituta, debilius quidem, dirigitur tamen juxta meridianam magneticam, ſed indiſcriminatim, quae extremitas polo telluris ſeptentrionali proximior eſt ad illum convertitur, quae vero auſtrali ad auſtralem dirigitur, & inverſa acus aeque facile contraria directione ſe collocat, quamdiu ex diuturna mora in aliquo ſitu conſtantem magnetiſmum non acquiſivit (*u*): ea enim directione ſe collocat, qua viam faciliorem praebeat magnetico fluido certa directione fluenti (21), quapropter cum id fluidum, quamdiu magnetiſmo deſtituta eſt oppoſitis directionibus juxta ejus longitudinem aequali facilitate feratur (15. 17.), idcirco oppoſitas directiones indiſcriminatim acus affectabit.

47. Neque ſolum terreſtris magnetis actio manifeſta fit, quando ex diuturno magnetici fluidi per ferrum fluxu id magneticum demum evaſit (44), verum etiam in ferro magnetiſmo deſtituto ejuſdem effectus obſervantur; nam ſi virga quaevis ferrea in ſitu quovis collocetur, ut meridianam magneticam interſecet, mediatas virgae, quae ad polum magneticum borealem telluris inclinat vim poli ſeptentrionalis oſtendit, quae ad auſtralem, auſtralis, inverſaque virga eae medietates contrarium polum protinus exhi-

(*ſ*) Id. loc. ult. cit.
(*t*) Exp. 146. pag. 268.
(*u*) Savery. vid. ſag. delle tranſ. del Cav. Dereham t. 5. §. 32. pag. 102.

exhibent, ita ut polaritas, quae reſpectu telluris conſtans eſt, reſpectu virgae ferreae ex mutato ſitu mutetur, donec ea virga conſtantem magnetiſmum ex diuturna mora in certo ſitu non fuerit adepta (*x*), ex quibus, & vis magnetis terreſtris conſpicua efficitur, & confirmatur magnetiſmi contrarietatem in contraria magnetici fluidi directione reponendam eſſe, & demum evincitur ferrum magnetiſmo deſtitutum a magnetico fluido aeque facile quacumque directione permeari (15. 17.), cum eadem virga magnetico fluido oppoſita directione fluenti, tam facilem tranſitum praebeat, ut ipſius extremitates ex inverſione in oppoſitos polos illico mutentur.

48. Quoniam ferrum ex magnetici fluidi juxta certam directionem fluxu magneticum fit, ex contraria ejuſdem fluidi directione contrarium acquirit magnetiſmum (16.45.), quoniam facilius ex fluido per meridianum excurrente, vel a magnete prodeunte vim magneticam acquirit, ſi ex igne molle, ſponte, vel ſuperaffuſa aqua refrigeſcat (*y*), quoniam chalybs durior difficilius magnetiſmo imbui poteſt (*ʒ*), ſed majorem recipit, & diutius ſervat (*a*), quoniam ignitio (17), percuſſio, attritus (*b*) magnetiſmum deſtruunt, inde confici videtur magnetiſmum in certa partium diſpoſitione ſitum eſſe, ob quam ferrum magnetico fluido ex una parte recipiendo, ex altera emittendo aptum ſit, eamque diſpoſitionem ab ipſo fluido induci, tum auferri poſſe, idque eo facilius, quo ferrum fuerit mollius.

49. Carteſiani, qui motus magneticos ex ſolis mechanicis legibus explicare contendebant, partibus magnetici fluidi, tum magnetis, ac ferri poris figuram tribuerunt, quam

(*x*) Id. l. c. §. 18. pag. 97.
(*y*) Conf. loca cit. §. 16., & 45.
(*ʒ*) Encyc. l. c.
(*a*) Muſchenb. diſ. pag. 232.
(*b*) Id. pag. 73. 74.

Digitized by Google

quam maxime opportunam eſſe opinabantur, aëris quoque reſiſtentiam, ac reactionem huc accerſerunt; cautiores alii, ut Muſchenbroeckius (*c*) Wiſthonus (*d*), cum Carteſianos ſcopum non attigiſſe animadverterent, vel ipſius magnetici fluidi exiſtentiam in dubium revocarunt. Ego ad mechanicas rationes omnia exigere minime potui, ac ne ſtudui omnino quidem, cum nec ipſa electricitatis theoria uſque eo perduci potuerit; malui igitur analogia ductus theoriae electricae innumera, ſejunctaque phaenomena ad certas claſſes revocare: nec vero diffiteor hanc me comparationem multo, quam fecerim, verſare potuiſſe accuratius. At ſumma tantum capita ſpeciminis loco attingenda eſſe putavi, ne in re facili nimia prolixitas lectori moleſta evaderet.

50. De Analogia inter fluidum electricum, ac magneticum hactenus: nunc de identitate horum fluidorum aliqua eſſent addenda. Et experimenta quidem nupera, per quae acus magnetica fit artificiali electriciſmo, aut ipſius poli mutantur; tum obſervationes, quibus conſtitit acus nauticae directionem vi fulminis mutatam fuiſſe, identitatem confirmare utique poſſent, ſi definitum eſſet, utrum electricum fluidum magnetiſmum inducat magnetici fluidi vices gerens, an agat duntaxat ad inſtar communis ignis (*e*), quod olim Muſchenbroeckius propoſuerat (*f*), quae minus dubia forent, ſi certis experimentis conſtaret, num extremitates acus quae meridiem, & ſeptentrionem reſpiciunt

i po-

(*c*) Diſ. p. 57. & ſeq., & a p. 63. ad 76., & p. 218., & Eſſai §. 587.
(*d*) Apud eumdem p. 65. diſ. cit. Cl. Monnier in act. Acad. R. S. P. an. 1733. contra fluidi magnetici receptam theoriam argumenta propoſuit.
(*e*) Revera ad magnetiſmum inducendum tanta requiritur electrici fluidi copia, talis acus inter vitreas laminas diſpoſitio, tanta ejuſdem tenuitas, ut electricum fluidum acus colorem mutare, quin imo ipſam liquefacere poſſit (Cl. D. Alibard. in addit. ad FranKlinum t. 2. pag. 137. 147. 148.) atque adeo effectus praeſtare, qui ab ignis violentia producuntur.
(*f*) Diſ. pag. 225. exp. 106.

Digitized by Google

polum conſtanter acquirant cognominem plagae, ad quam diriguntur, quaecumque fuerit directio fluidi electrici acum permeantis; num contra in quocumque acus ſitu extremitas, per quam electricus vapor ingreditur, ſeptentrionalis, per quam egreditur auſtralis perpetuo evadat (*g*), num demum acus juxta aequatorem magneticum collocata ex electricitate nullum magnetiſmum acquirat, quemadmodum ignitum ferrum eo in ſitu refrigeratum nullum adipiſci experimenta demonſtrarunt (45).

54. Caeterum contraria, quae ſe ſe offerunt argumenta minime reticenda videntur. Scilicet primo magneticum fluidum dum a magnete ad ferrum, vel a ferro ad magnetem fluit, per interpoſitam aëris laminam, etiam in tenebris non lucere, quod electricum fluidum facere ſolet. 2. Ab aëre reſiſtentiam nullam pati, nec ab interpoſita candela ejus actionem mutari, nec ſtridorem edere, auramve excitare (41), quae omnia phaenomena in electrico fluido obſervamus. 3. Magnetem ipſum frictione electricum fieri, tumque novam proprietatem acquirere a priori diſtinctam, cito ceſſantem. 4. Reſinoſa, ſerica corpora, quae fluidum electricum coërcent, magneticum non magis, quam caetera coërcere 5. Metalla omnia, ferro excepto, quae fluidum electricum deferunt, magneticum non magis, quam caetera deferre (*h*). 6. Corpora deferentia electricum fluidum maxima copia deferre facile poſſe, deferentia electricum nonniſi certa quantitate (37) 7. Ex affrictu corporum electricum fluidum deferentium vim nullam electricam naſci, contra ex ferri contra ferrum certa lege affrictu maximum magnetiſmum produci. 8. Demum eas tempeſtatum mutationes, quae electrica phaenomena inſigniter

(*g*) Non conſentiunt FranKlini, & D. Alibardi experimenta t. 2. p. 144. 145.
(*h*) Muſch. Eſſai. §. 187. n. 3.

Digitized by Google

gniter mutant, non eodem modo magnetica afficere, contra, quae magnetica afficiunt, non ſimiliter afficere electrica (*i*), quae omnia fluidorum horumce identitatem, ſi non refutare, at certe dubiam reddere poſſe videntur.

(*i*) Encyc. artic. cit.

EJUSDEM.

De colore Sanguinis experimenta nonnulla.

COccineum rutilumque ſanguinis colorem, exhauſto aëre, in atrum, & nigricantem converti Cl. Viri ſcripſerunt (*a*), cum contrarium alii traderent ſupremam nempe ſanguinis ſuperficiem in vacuo non minus, quam in aperto aëre rutilum colorem ſervare (*b*). Quod quidem experimentum cum multis phyſiologicis graviſſimis quaeſtionibus illuſtrandis opportunum eſſe animadverterem, ea cautione, eaque diligentia renovari cupiebam, ut nullum de ipſius eventu dubium ſupereſſet. Itaque Virum experientiſſimum J. B. Beccaria rogavi, ut idipſum ſuſciperet, quod humaniter praeſtitit, quemadmodum ſum expoſiturus.

1. Sanguinem ex homine febricitante eductum, & quaſſatione ſolutum in bina pocula vitrea aequalia, & ſimilia infudit, horum alterum ſub recipiens pneumaticum collocavit, alterum in aperto aëre reliquit. Subducto aëre ſanguinem ſub recipiente poſitum inſigniter elevari, in ſpumam faceſſere, intumeſcere in bullas obſervavimus ſenſim increſcentes, quae tandem diſruptae aërem emittebant elaſticum, ex quo altitudo mercurii in appoſito indice augebatur: interea color ſanguinis eleganter floridus, & rubicundus perſeverabat.

Cum vero repetitis diu exantlationibus omni aëre exhauſtus ſanguis ſubſediſſet, floridum colorem cum atro, & nigricante mutavit, quemadmodum ex comparatione cum eo, qui extra recipiens erat, facile innotuit; etenim non in ſuprema tantum ſuperficie, verum etiam in tota mole multo obſcurior, ac nigrior deprehendebatur; poſtremo cum poculum

(*a*) Dorſten apud Haller n. 9. ad §. 203.
(*b*) Gorter comp. trac. 31. §. 9. n. 9., & Rega conſent. SchvvencKe haematol. p. 116.

Digitized by Google

culum eductum ex recipiente fuiſſet, paullo poſt contentus ſanguis rutilum in ſuprema ſuperficie colorem recuperavit, & rutili ſtrati craſſities, aëre profundius pervadente, ſenſim, ſenſimque increſcebat, adeo ut poſt aliquod tempus totum ſanguinem aeque rutilum, ac prius, ſe inveniſſe Cl. Beccaria narraret.

3. (α) Cum igitur aër ſanguini admixtus ruborem faciat, inde cum Lovvero intelligimus, cur ſanguis venae pulmonalis, perinde ac arterioſus floridus ſit, cur contra arteriae pulmonalis ſanguis perinde ac venoſus atro colore inficiatur.

(β) Cur poſtquam ſanguis arterioſus, & venoſus per aliquot minuta aëri expoſitus fuit omne coloris diſcrimen tollatur (*).

(γ) Cur item, obturata trachea, & impedito aëris acceſſu ad pulmonem id diſcrimen ſanguinis arterioſi, & venoſi tollatur.

(δ) Cur inflato in cadavere pulmone, eadem diverſitas reſtituatur (c).

(ε) Cur rejectus ex pulmone ſanguis ſpumoſus floriduſque eſſe ſoleat.

(ζ) Cur in foetu, qui pulmone non utitur, ſanguis obſcuri, & rubiginoſi coloris, & aquoſus perpetuo reperiatur (d).

(η) Cur in eryſipelate, aliiſque morbis, quos ingruens putredo comitatur, ſanguis intenſe floridus, ac rutilus obſervetur (e), aëre nempe putredinis vi ex eodem prodeunte, cur item in confirmata putredine, omni prorſus aëre difflato, ſanguinis color niger, & luridus evadat.

(θ) Cur

(*) Hammerſchmidt. in diſput. cui titul. notabile diſcrimen inter ſanguinem arterioſum, & venoſum §. 22.

(c) Vid. Lovverum de mot. cord. p. 159. & ſeq., & conſentientes Bohon, Duverney apud Haller n. 11. ad §. 200.

(d) Obſervante Haller l. c.

(e) Gorter. Chirurg. §. 14. 29. & alibi.

Digitized by Google

(ϑ) Cur demum in gangraena partes emphyſematicae evadunt aëre vi putredinis prodeunte, tumque ſanguis ex ſcarificationibus effluens nigro colore inficiatur.

Sanguis quaſſatione ſolutus, & aequabili rubore praeditus, dum putreſcit, ruborem amittit, nigrumque colorem acquirit, & primo quidem ea mutatio in ſuperiori ſanguinis ſtrato contingit, quae pedetentim ad inferiora ſtrata progreditur, quemadmodum in ſuis circa putredinem experimentis D. Gaber obſervavit, cujus phaenomeni ratio eſſe videtur, quod ſuperiora ſtrata putreſcentia aërem facilius emittant, quam illa, quae iiſdem ſubjiciuntur.

Definiendum autem ſupereſſet, num ſanguis ruborem in pulmone receptum in venis amittat ex eo, quod aërem per corporis ſuperficiem expellat (*f*), an quod aëri elaſticitatem demat, & rubori ſervando imparem efficiat, inde enim forte intelligeretur, cur diverſitas ſanguinis arterioſi, & venoſi aliquando maxima, alias nulla fuerit obſervata (*g*).

4. Sanguis porro quamdiu ſolutus eſt, aequaliter coloratus apparet, dum autem concreſcit in ſuprema ſuperficie ruborem ſervare, in infima nigrum colorem induere ab antiquiſſimis temporibus eſt obſervatum (*h*), idque poſt Galenum (*i*), veteres plerique tribuerunt humori melancholico, qui reliquo ſanguine gravior, & nigrior proprio pondere ad infimam vaſis partem delaberetur, interea dum cruor ſpecifice levior ſupernataret, nec multum ab hac theoria receſſerunt recentiorum non pauci, qui ruborem parti magis ſulphureae, leviori, tenuiorique tribuerunt, inferioris partis nigredinem denſiori, magiſque terreſtri ſanguinis

(*f*) Quae Mery ſententia eſt apud Haller. n. f. ad §. 201., quam idem Hallerus rejicit n. a ad §. 432.

(*g*) Haller prim. lin. phyſ. §. 117. 206. caeterum eam diverſitatem nuper confirmavit Hammerſchmidt. diſp. cit. §. 22.

(*h*) Ariſt. hiſt. anim. lib. 3. cap. 19. Hippoc. de gland. 1. 6.

(*i*) Com. in 3. epid. 1. 5. de atra bile toto libro, de elem. 2. 12.

Digitized by Google

guinis parti adſcribendam eſſe exiſtimarunt (*K*), & quamquam, inverſa ſanguinea placenta, ut inferior ſuperficies ſuprema evaderet, quae vero ſuprema fuerat in inferiorem abiret, illam rubrum, hanc nigrum colorem induere cernerent (*l*), id nihilominus tribuere maluerunt gravioribus, & nigrioribus ſanguinis partibus, quae ſuperiora deſerant, & proprio pondere ad inferiora trudantur (*m*), quamquam non levis erat objectio in maſſa ſolida, & concreta, qualis ſanguinea placenta eſt, haud facile partes juxta variam ſpecificam gravitatem diſtribui poſſe: ut igitur phaenomeni cauſſam aſſequerer, ſequentia experimenta inſtitui.

5. Sanguinem ex vena hominis pleuritici eductum ſtatim affudi aequali quantitate in bina pocula vitrea aequalia, & ſimilia. Alterius ſuperficiem ſuperaffuſo oleo ad pollicis altitudinem cooperui, alterum in libero aëre reliqui, in utroque ſanguis coagulabatur, & is, qui aëri expoſitus erat rutilum admodum ruborem in ſuperficie aëri contigua contrahebat, reliqua ſuperficiei pars, quae poculi parietes tangebat in atrum colorem mutabatur: ſanguis vero alterius poculi, educto per ſyphonem oleo, aequabiliter niger eſt deprehenſus, interea aëri expoſitus ruborem in ſuperiori ſuperficie adeptus eſt, in aliquibus tantum locis, ubi oleo adhuc inunctus erat, nigrum colorem ſervavit. Id deinceps experimentum in recenti vitulino ſanguine coram Cl. Beccaria, pari ſucceſſu, renovavi.

6. Cum igitur nigricans color non in infima tantum ſuperficie naſcatur, verum etiam in quacumque alia poculi parietibus contigua (*n*) patet nigredinem non fieri a partibus gravioribus fundum petentibus: imo cum ſuprema etiam

(*K*) SchuvencKe Haematol. cap. 11. p. 117. Gorter compend. trac. 31. §. 22. n. 3. alii permulti.

(*l*) Notante primum Fracaſſato in tranſ. phil. anni 1667. num. 27. art. 4., qui id aëri tribuit.

(*m*) ScuvencKe l. c., qui globulos alios prae aliis ponderoſiores eſſe docet.

(*n*) Conſent. Boer. Chem. t. 1. p. 261. edit paris.

Digitized by Google

etiam ſuperficies atro colore infecta ſit, ſi tenui olei ſtrato obtegatur manifeſtum fit ab immediato aëris attactu ruborem oriri: errant propterea, qui putant ruborem a levioribus partibus eſſe repetendum, niſi forte eo ſenſu leviores eſſe velint, quod ob contiguum, admixtumque aërem aliquanto ſolutae, minuſque invicem cohaerentes ſtratum efforment ſpecifice levius (*o*), interea dum partes ipſae a reliquis ſanguineae maſſae partibus nullo modo differant.

7. Hanc etiam partium ſpecifice leviorum hypotheſim alio experimento refutare aggreſſus ſum, quod a Lovvero olim jam tentatum inveni (*p*), ſupremam nempe rubicundam coagulati ſanguinis ſuperficiem cultro abradebam, & nigricantem ſubjectam ſuperficiem detegebam, quae, ubi per breve tempus aëri expoſita fuiſſet, novum rubicundum ſtratum priori ſimile ſuppeditabat, atque eo pacto repetita abraſione totam ſanguineam placentam in rubra ſtrata convertere facile potuiſſem.

8. Praeterea vero, ſive amplo, ſive anguſto vaſe ſanguis recipiatur, in ſuprema tantum ſuperficie rubicundus apparet; attamen ſi ex particulis datae ſolummodo gravitatis rubor oriretur, eo craſſius rubicundum ſtratum eſſe deberet, quo vas arctius, craſſius item, quo major copia ſanguinis in eodem vaſe contineretur, nec fieri poſſet, ut modica ſanguinis copia in amplum vas effuſa tota rubeſceret, quemadmodum quotidianis experimentis comprobatur.

9. Poſtremo ſanguineam placentam mox ex poculo eductam, atque adeo in lateralibus, & inferiori ſuperficie nigricantem reti ſuperimpoſui, & non multo poſt in lateralibus, & inferiori ſuperficie aeque florida evaſit, ac in ſuprema, ut aequabiliter colorata quaquaverſum deprehenderetur.

10.

(*o*) Quae LeuvvenhoecKii ſententia eſt in obſervationibus circa ſanguinem menſ. Iunii 1674.

(*p*) Loc. cit.

10. Ex his autem etiam eorum ſententia infirmatur, qui inferiorum partium nigredinem ex ſuperiorum pondere, aut preſſione oriri autumant; obſervavimus enim tenuiſſimum olei ſtratum ſanguinis ſuperficiem inungens nigritudinem ſervare, ex quo tamen vix ulla compreſſio poteſt expectari; deinde, ſi nigrities ex incumbentium partium preſſione oriretur, prout ſanguis profundior eſſet, magiſque compreſſus, eò majorem nigredinem acquireret, cum tamen iis in locis, quibus aërem non attingit, aequabiliter niger conſpiciatur.

11. Quoniam igitur ſuprema ſanguinis ſuperficies rubra eſt, quando aërem tangit, nigra, quando aër ab eadem arcetur (5), & ſimiliter infima ſuperficies, quae nigra eſſe ſolet, admiſſo aëre, rubeſcit (9), quoniam ſanguis totus rubeſcere poteſt, ſi vel ſimul, vel ſucceſſive aëri totus exponatur (7. 8.), quoniam rubor, & nigrities, non per ſucceſſivos gradus aut creſcit, aut minuitur pro altitudine incumbentis ſanguinis, ſed aequabilem ruborem, & aequabilem nigredinem ſanguis acquirit (10), quoniam aëre exhauſtus ſanguis niger evadit (2), manifeſtum fit ab aëris attactu ſanguineae placentae ruborem oriri.

12. Ex his intelligitur, cur ſi conquaſſatione aër ſanguini admiſceatur, & tardius concreſcat, & majorem ruborem acquirat (q).

Cur ea, quae ſanguinem fluidum ſervant, eadem ruborem ſervare ſoleant, & contra.

13. Sanguis porro, dum concreſcit, denſior evadit (r), & interim ruborem, ut diximus, amittit: errant igitur, qui ex majori denſitate ſanguinis arterioſi, & condenſatione in pulmone nata ipſius ruborem deducunt: quod ſi in pulmone, non maſſae ſanguineae, ſed globulorum denſitatem augeri intelligant, quo id tandem experimento comprobarunt? Profecto inter globulos ſanguinis arterioſi, & venoſi nullum

k dif-

(q) Ex Lovvero, Haleſio aliiſque.
(r) Jurín in compend. tranſac. philoſophic. verſione italica Derehami tom. 3. pag. 3. exp. 13.

Digitized by Google

diſcrimen microſcopii ope detegere potuit Hammerſchmidtius (*ſ*), quod oſtendit coloris diverſitatem non in componentibus particulis, ſed in varia earumdem miſcela, ac diſpoſitione poſitam eſſe.

14. Cum in foetu ſanguis aquoſus ſimul, & obſcurus deprehendatur, (3-ζ) patet ex ſola ſeri mixtione ruborem non oriri.

15. Ad attritum quod ſpectat, ex quo ruborem in pulmone naſci plerique exiſtimant, jam recte oppoſuit Lovverus in muſculis multo magis, quam in pulmone ſanguinem atteri (*t*), attamen ab ipſis nigricantem prodire, & praeterea adnotandum in ejuſdem Lovveri experimento, in cadavere ſtrangulati canis, inflato pulmone, ſanguinem comprimi potius, quam atteri debuiſſe, nihilominus ruborem ſanguini fuiſſe reſtitutum, ac proinde ſoli attritui ruborem in pulmone natum minime eſſe adſcribendum.

16. Neque vero facile eſt definire, cur coagulatus ſanguis ea in parte, qua aërem non attingit, niger evadat; num ex eo, quod liber aëris per ſanguinem tranſitus prohibeatur, qui dum libere permeat ſalia, vel quid aliud deponat rubori ſervando aptum, quod non videtur; nam in clauſo etiam ſpatio ſuprema ſanguinis pars rubicunda diutiſſime remanet, dummodo tenuem aëris lamellam ſuperpoſitam habeat; num ex eo, quod atmoſphaerae pondere ſanguis prematur, quod iterum probabile non eſt; ſiquidem atmoſphaerae preſſionem non minus ſuperficies patitur oleo inuncta, quam ea, quae immediatae aërem contingit; num demum aër ſanguini admixtus, & globulis ſanguineis interpoſitus ruborem ſervet, contra concreſcens cruor contentum in poris aërem expellat, vel ita fixum reddat, ut rubori efficiendo impar evadat, quod aucta concreti ſanguinis denſitas, & emiſſus ab aliis concreſcentibus fluidis aër confirmare quodammodo videntur.

JOH.

(*ſ*) L. c. §. 6. (*t*) Conſentit Cl. Sauvages Phyſ. elem. pag. 110.

Digitized by Google

JOH. BAPTISTAE GABER

Specimen experimentorum circa putrefactionem humorum animalium.

QUanti Medicinam, & naturalem ſcientiam interſit putrefactionis hiſtoria, jam ipſe noverat Philoſophiae inſtaurator Verulamius, qui Medicis idcirco, & Philoſophis ſaepe auctor fuit, ut illius cauſſas, modos, & phaenomena diligentius perveſtigarent; eaque paſſim commoda ſignificavit, quae in affines facultates derivari poſſent. Atqui tanti Viri monita uſque adeo neglecta ſunt, ut vix pauci rem tam neceſſariam tractandam, & illuſtrandam ſuſceperint; ſed plerique ex aliis quaecumque extiterant experimenta, & obſervationes deſcribere, aut ex praeconceptis opinionibus conſectaria deducere maluerunt; quam rem tentare, & ſcrutari diligenter: ex eo fortaſſe etiam praetextum aliquem nacti, quod videbant Chymicorum ſectam, & quidquid Chymicam ſaperet male audire apud prudentiores Medicos, qui ex illius abuſu tantam intelligebant rei Medicae perniciem illatam. Sed egregiam huic facultati navavit operam Clariſs. Pringle, qui rem diu ante neglectam retractandam adgreſſus eſt, novaſque aperuit in tam multiplici, & complicata diſquiſitione proficiendi, progrediendique vias. Magni hujuſce Viri exemplo, & monitis excitatus ejus veſtigia perſequi conſtitui, quod & rei utilitatem perſpectam haberem, & vitae, officiique mei ratio commodam mihi occaſionem exhiberet hujuſmodi tentandi experimenta. Neque tamen totam ſimul putrefactionis hiſtoriam inveſtigandam ſuſcepi, ne pluribus intentus minorem in ſingulis diligentiam adhiberem. Solos humanos humores, neque omnes, ſed praecipuos tantum per experimenta ſcrutatus ſum, cum haec cogni-

Digitized by Google

tio prae caeteris omnibus plurimum conducere videatur ad multorum morborum internas cauſſas detegendas, eorum effectus, ſeu ſymptomata explicanda, atque ideo ad indicationes eruendas. Quoniam autem experimenta noſtra cum Pringlianis minime conveniunt, cauſſas idcirco ex ipſis experimentis eductas aperiam, quibus eventuum diverſitatem adſcribendam puto.

Lubens omitto inutilia omnia tentamina, qualia antequam aliquid certi in hoc genere aſſequi poſſem, fere innumera inſtituere opus fuit: ea duntaxat recenſebo, quae novam aliquam lucem videntur ſuppeditare.

1. Quinquagenarius vir abſque febre inveterato ictero confectus eſt. Cadaver integro nychtemero, brumali tempore, loco frigido repoſitum fuerat: hoc tranſacto temporis intervallo, diſſecabatur: conſpiciebantur craſſa inteſtina cinereis foecibus infarcta, tenuia flaveſcente muco hac illac conſperſa, cyſticus, & choledocus ductus pervii: cyſtis ipſa bilis in atrum vergentis ingenti copia diſtendebatur. Veſicula pertuſa bilem vitreo vaſe excipiebam, modicum foetebat, viſcida erat, & tenax: minuſculae hujus portioni unam, vel alteram aquae fortis guttulam affudi: efferveſcebat, erumpebant ad liquoris ſuperficiem aereae bullae cum ſibilo, qui admoto ad aures vaſculo percipiebatur, atque ipſo tactu ſentiebam liquorem incaleſcentem.

2. Superſtitem bilem in tres portiones diſtinctas totidem vitreis vaſis apertis infudi, vario ſitu, & vario caloris gradu diſtribui; unum in hypocauſto ad trigintaquinque circiter gradus Reaumuriani Thermometri calefacto, alterum in alio hypocauſto, quod viginti quinque tales calebat gradus, tertium vero cubiculi ſervabat temperiem, quae inter ſeptimum, & decimum fere continebatur. Viginti quatuor horis elapſis ſingulas portiones acidis exploravi. Quae bilis triginta quinque graduum calori fuerat expoſita, ea dilutior evaſerat, vixque indicia leviſſimae effer-

Digitized by Google

efferveſcentiae praebebat: bilis, quae vigintiquinque gradus caloris paſſa fuerat, diluta quoque apparuit, cum acidis aliquanto magis, ſed parum admodum efferbuit: quae demum fuerat in cubiculi temperie relicta ſuam viſciditatem ſervaverat, & aeque vehementer, ac antea (1) cum acidis confligabatur. Quod poſtremum experimentum coram Equite Salutio, Ludovico de la Grange, D. Cigna, & Mich. Ant. Plazza luculentiſſimis teſtibus, aliquot exinde horis ſimili eventu renovavi.

3. Ex ejuſdem cadaveris vena eodem tempore eductus ſanguis rubro-flaveſcentem exhibebat colorem. Ejus ſanguinis portio ſimulac fuit educta, & nitri ſpiritu dilutiori permixta efferveſcentiam ſimiliter exhibuit, multo tamen minorem, quam bilis; quo ſanguine in digeſtione per paucas horas relicto, flavum ſerum a cruore ſecedebat, quinimo flavo colore ſuperficies cruoris inficiebatur. Idem ſanguis per tantumdem temporis, ac bilis in hypocauſtis ſervatus majorem efferveſcendi vim retinuit, quam bilis, quae vis ex mora ſenſim hebeſcebat.

4. Ex hujuſmodi obſervationibus haec videntur poſſe deduci conſectaria.

1° Tantam in morbis naſci poſſe alkaleſcentiam, ut humores cum acidis efferveſcant: neque enim probabile eſt, eam in cadavere mutationem contigiſſe, quod per horas viginti quatuor ſervatum fuerat in loco frigido, ubi per plures dies ſervati humores ſani ad talem alkaleſcentiae gradum vix perveniſſent.

2° Levem putredinis, & foetoris gradum, qui extra corpus nullum adhuc alkali praebet, quemadmodum experimentis inferius exponendis conſtabit, intra animale corpus alkali producere.

3° Alkali intra corpus genitum, & bile contentum volatile admodum eſſe, & expeditum, quippe quod vigintiquinque graduum calore tam brevi tempore maxima ex

parte

Digitized by Google

parte in auras avolaret, ſecus a reliquorum elementorum nexu aliquanto magis intricatum eſſe illud alkali, quod in ſanguine continetur, minuſve volatile, quum per idem tempus, eodem calore, minor ejuſdem portio diſſiparetur.

5. Ex poſtrema hac obſervatione conjecturam feci, an forte in tentaminibus, quae circa putredinem fuerunt inſtituta, ex quibus indubias alkali notas nonnulli compeꝛiſſe affirmant, alii vix leviſſimas obſervaſſe teſtantur, eventuum diſcrepantia ex vario caloris gradu, varia corruptorum corporum aetate, majori, minorive geniti alkali libertate repetenda eſſet.

6. Non aliter ac bilem corruptam, integram bilem tentavi, ſanguinis cruorem, & ſerum: ſingulorum tres diſtinctas portiones memoratis (2) tribus diverſis caloris gradibus expoſui, & quum acidis mineralibus eos liquores quotidie explorarem, deprehendi omnium humorum citiſſime bilem efferbuiſſe (*a*), & citius adhuc humanam, quam bubulam; aliquanto tardius cruor corruptus cum acidis efferbuit, omnium tardiſſime ſerum effervescentiam exhibuit. Quae porro effervescentiae iiſdem phaenomenis diſtinguebantur, quae paullo ante memoravi (1); neque vero cum ſolis acidis mineralibus corrupti humores effervescebant, verum etiam cum dilutiſſimo aceto diſtillato confli-ctabantur. Quae artificiali calori expoſitae fuerant humorum portiones foetorem citius, & effervescentiam dederunt; citius quinimo pervenerunt ad ſummum effervescentiae gradum, quem cum attigiſſent, continuato ejuſdem loci calore effervescendi vim non ſolum amiſerunt (*b*), ſed ingratiſſimum

(*a*) Inter omnes humores citiſſime putreſcere. Baglivi Oper. omn. p. 439.; & digeſtam ſal alKali copioſius dare. Henninger de bile. Argent. 1705. apud Haller not. 2. ad §. 99.

(*b*) Imo ſerum in hypoc. ad 35. calido nunquam efferbuit, argumento dicendi alKali in ſero natum ex eo caloris gradu diſſipatum fuiſſe ea proportione, qua gignebatur.

Digitized by Google

mum foetorem in herbaceum, ac minime injucundum odorem commutarunt (*c*). Caeterum multo citius plerumque prodiit foetor, quam alkaleſcentia, idemque tardius deſiit.

7. Dixi corruptos humores cum acidis mineralibus efferbuiſſe, quod ut clarius deſignem, notare juvat me ut plurimum aqua forti uſum, quae diluta admodum erat, nec ullum, vel minimum excitabat motum aquae communi admixta; tantumque abeſt, ut acidorum concentrationi tribuenda ſit effervescentia (*d*), ut potius putem, ſi nimia ſit eorumdem concentratio, effervescentiam inde minorem reddi poſſe ex eo vel maxime, quod cito nimis, arctiuſque ex acidis concreſcentes animales humores effervescentiae motui reſiſtant: adhibito enim aceto diſtillato, quod corruptos humores nequaquam coagulabat, vehementem pariter oriri effervescentiam deprehendi; imo aliquando ex admixto aceto diſtillato totum corruptum ſerum in ſpumam abiiſſe.

8. Jam vero dum Clariſs. Pringle experimenta perpendo, adverto eumdem aliquando partes putreſcentes calori centum graduum Thermometri Fahrenheitiani (qui quidem calor triginta gradibus Reaumurianis fere reſpondet) expoſuiſſe, in quo calore animales humores citius quidem putreſcunt, veruntamen eadem celeritate, ac temporis brevitate ex putreſcentia acquiſitam alkaleſcentiam amittunt; cum itaque limites temporis, inter quos ex eo calore putreſcentes humores alkalinam indolem oſtendunt, anguſti admodum ſint, fieri facile potuit, ut nulla alkaleſcen-

(*c*) Bilis in loco tepido mox ranceſcit, graviter olet, & poſt longum tempus ambrae odorem contrahit. Boerh. in praelect. ad §. 99. ad verbum *aceſcentibus*. Quod vero de bile docuit Boerhaave, id generatim in omnibus humoribus tepido loco putreſcentibus obtinere comperi.

(*d*) Quemadmodum in bile ſana contingit, quae cum fortiſſimis acidis efferveſcit, obſervante Verehyeno, & Hombergio. Mémoir. de l'Acad. des Scienc. 1700. eo fere modo, quo aqua ipſa ab oleo vitrioli incaleſcit. Boerh. Elem. Chim. tom. II. pag. 301.

leſcentiae ſigna obtinuerit, ſi intra eoſdem limites non inſtituerit experimentum, videlicet ſi paullo ante quam alkali genitum fuiſſet, vel paullo poſtquam in auras abiiſſet, corruptos humores exploraverit. Praeterea etiamſi intra illos ipſos limites tentaſſet experimentum, cum tamen ea proportione, qua alkali gignitur, magna ex parte ex ambienti calore in auras diſſipetur, eo pacto non niſi levia alkaleſcentiae indicia eruere debuit, dum tamen ex minore caloris gradu evidentiſſima ſum aſſecutus. Si igitur humoribus ad eum caloris gradum putrefactis ſemper uſus fuiſſet Clariſs. Pringle, ex propoſita interpretatione noſtra experimenta cum ipſius experimentis conciliari poſſe cenſeo: ſin minus, vel varietati individuorum, ex quibus humores educti fuerant (1. 3.), vel vario gradui concentrationis acidorum (7), vel alii, quam ignorem, cauſſae diverſitas adſcribenda erit.

9. Sanguinem, dum e vena flueret, continua quaſſatione ſolvebam, quaſſatum deinde putrefieri ſinebam; rubens, & floridus, qui apparuerat color, pedetentim mutabatur, & in atrum, nigrumve vergebat, quae quidem mutatio non eodem tempore totam ſanguinis maſſam inficiebat, ſed a ſuperiori parte incipiens temporis progreſſu ſenſim ad inferiorem propagabatur.

10. Si vero ſanguis ita quaſſatus fuiſſet, & tardius putreſcebat, & tardius praebebat alkaleſcentiae indicia, quam cruor a ſero ſejunctus, quod ſcilicet prae omnibus humoribus ſerum tardiſſime putreſcat.

11. Cum propoſitis experimentis comperiſſem alkali in auras avolare ex miti caloris gradu, experiri adhuc volui, an non illud ipſum alkali colligere poſſem, ac retinere. Vitreo itaque alembico ſerum ſanguinis ex febricitantibus paucas ante horas eductum excepi: alembicum repoſui in hypocauſto inter vigintiquinque, & vigintiocto Thermometri Reaumuriani gradus calente, collum alembici per

fora-

foramen in operculo ligneo hypocauſti apertum trajiciebatur eo conſilio, ut eidem adaptatum capitellum cubiculi, decem circiter ejuſdem Thermometri graduum, temperiem ſervaret, & exhalans vapor inibi colligi, & in liquorem poſſet condenſari: capitelli roſtro phialam agglutinavi, quae collectum liquorem reciperet; alternis diebus obtinebam diſtillati liquoris drachmas tres, cui acida admiſcens, varium, vario tempore, conſequebar effectum. Portio, quae primum adſcenderat, feri odorem, & ſaporem referebat, limpida erat, & diaphana, neque cum acidis, neque cum alkalicis efferveſcebat: portio, quam altera vice obtinui, foetidum quidem, modice tamen olebat; ejuſdem ferme ſaporis erat, & pelluciditatis ac prima, atque in his cum ſecunda conveniebat tertia: nulla huc uſque efferveſcentia. Quarta portio foetebat graviter, turbida erat, & opaca, coloris ſubalbentis, nullam exhibuit efferveſcentiam, ſed levem rubelli coloris tincturam ab admixtis acidis aſſequebatur. Quinta portio, quae ſcilicet poſt dies decem diſtillaverat, limpida iterum apparuit, admixtis acidis efferveſcentiam dedit cum ſibilo, qui admoto ad aures vaſe percipi poterat, bullas, ſpumamque excitavit (e). Sexta portio itidem limpida, debilius efferbuit. Cum jam nihil liquoris ex eo caloris gradu diſtillare obſervarem, alembicum fregi, ut reſiduum examini ſubjicerem; cruſtam efformaverat glutinoſam ſubrufam, corio ſimilem, quae peſſimum foetorem emittebat, nullum tamen, vel leviſſimum affuſis acidis indicium dedit efferveſcentiae. Ex hoc experimento patere arbitror vigintiquinque inter, & vigintiocto caloris gradus alkali diſſipari, quod ſi colligatur, efferveſcat, maſſam inde relinqui foe-

(e) Hoc experimentum tentavi matutinis horis, cum adeſſet D. Cigna: horis vero veſpertinis, cum illud Clariſs. D. Bruni obſervandum praeberem, eventu quidem non caruit, ſed minor inde nata eſt efferveſcentia: Heliotropii tinctura huic liquori admixta minime coloris mutationem paſſa eſt.

Digitized by Google

tentiſſimam utique, ſed emiſſo alkali ad effervefcendum ineptam.

12. Cum ſanguinem intra vas accurate obturatum ſervaſſem, diutius alkaleſcentem indolem retinuit, etſi calori vingintiquinque graduum expoſitus fuiſſet; dum vero obturaculum educerem magno impetu vapores erumpebant, quibus totum cubiculum tetro admodum odore inficiebatur: vaporum exploſio orta videtur ab aëre per putreſcentiam extricato. Ex quo experimento intelligi poteſt, cur intra vaſa humani corporis humores vix foetentes jam alkali contineant (§. 4. n. 2.), cum educti, & in apertis vaſis ſervati gravem foetorem prius acquirant, quam ullum alkali indicium praebeant (6): nempe intra vaſa humani corporis, ubi primum alkali gigni incipit, retinetur, cum in apertis vaſis exhalans, tum demum percipi poſſit, quando majori copia gignitur, quam in auras diſſipetur.

13. Quoniam vero ſerum integrum poſt decem demum dies alkali emiſit (11), nonniſi poſt illud temporis intervallum corruptum fuiſſe cenſeo, tum quod clauſo in vaſe tardius humores corrumpantur, tum quod inter illos ſerum tardiſſime putreſcat: quod ſi corruptum jam humorem diſtillationi commiſiſſem, minime dubitabam protinus alkali proditurum; propterea cupiebam corruptis humoribus idem experimentum capere, quod ſero ſano inſtitueram, ut & tempus definirem, quo alkali diſtillare inciperet, & collecto diſtillante liquore, eam coloris caerulei vegetabilis mutationem iterum tentare, quam ob cunctationem praecedenti experimento obtinere nequiveram. Sanguinem itaque putrefactum, & ex putrefactione cum acidis effervefcentem (quem ſolum alkaleſcentem humorem tum habebam in promptu) alembico incluſi vitreo, eidemque caloris gradui expoſui eodem apparatu, quem in ſuperiori experimento adhibueram. Et quum prima die ſtillantes liquoris drachmas duas acidis variis miſcerem, vehementem effervefcentiam obſervavi, eum-

Digitized by Google

eumdemque liquorem ſucco violarum inſtillans, color viridis non minus elegans ortus eſt, quam ex affuſo ſpiritu c. c. oriretur, inductoque rubore ex admixta aqua forti, is nova diſtillati liquoris affuſione deletus eſt, & violaceus color reſtitutus. Liquor, qui per quinque ſequentes dies diſtillavit, eaſdem alkali notas retinuit, quibus elapſis cum nihil amplius diſtillare obſervarem, alembicum fregi, & ad ejus fundum cruſtam inveni deſcriptae (11) ſimilem, ſub qua portio ad ſyrupi conſiſtentiam redacta recondita erat, quae alkalicam adhuc indolem oſtendebat, ſed levem, adeo ut ſpatio duodecim horarum, per quod ſuper feneſtram, cujus temperies circa decem gradus Thermometri Reaumuriani erat, diſſipato alkali, nulla ipſius veſtigia remanſerint.

14. Igitur & efferveſcentia, & colorum mutatione conſtat verum alkali illud eſſe, quod in humoribus putrefactis natum leviſſimo calore in auras diſſipatur. Ipſis equidem humoribus putrefactis colorum mutationem tentare maluiſſem, niſi & ſeri corrupti turbida opacitas, & ſanguinis rubor, ac bilis flavedo ambiguum de hiſce experimentis judicium effeciſſent; limpido itaque exhalante humore eadem experimenta inſtituere tutius eſſe putavi, ut omne erroris periculum declinarem.

15. Quum foeteret graviſſime reſiduum diſtillationis, quamquam omni alkali orbatum fuiſſet, manifeſtum videtur ab alkali foetorem exaltari quidem poſſe, & magis penetrantem effici, non autem ab eodem produci, quandoquidem ſupereſt eo ſublato.

16. Quoniam tamen continuato calore non ſolum alkaleſcentia, ſed & foetor ſimul perit (6), videtur is odor a volatilibus admodum particulis etiam proficiſci, ſed quae ab alkali volatili diſſimiles ſint, & plerumque citius gignantur, tardiuſque diſſipentur, cum ante alkaleſcentiam, & poſt ipſam foetor plerumque percipiatur (8). Praeterea vero aliquando alkaleſcentia adeſſe poteſt modico foe-

tori conjuncta, ut obſervavimus (13), viciſſim maximus foetor abſque alkaleſcentia, ut in poſtremo experimento deprehendimus (11. 12.). Ex quibus differentia inter foetidas, alkalinaſque partes confirmari videtur, quam Clariſs. Pringle alio argumento demonſtraverat, animadvertens corruptae urinae halitus minime pernicioſos eſſe, etſi prae caeteris corruptis corporibus maximam alkali ſalis quantitatem contineat; cum corruptorum aliorum humorum halitus infeſti admodum ſint, ex quo efficitur eos ab alkalici ſalis natura diſcrepare.

17. Quae cum ita ſint, videtur alkali volatile non eſſe productum neceſſarium putrefactionis, neque gradum alkaleſcentiae gradui putrefactionis reſpondere, ſed nativa ſalia oleis permixta vi putrefactionis volatilia reddi, ſi de ſtirpium partibus ſermo ſit, ſi vero de partibus animalium, videtur alkali actione viſcerum jam inchoatum, aut aliis adhuc elementis involutum ex putrefactione perfici, aut extricari: quapropter eo major quantitas alkali ſalis ex putrefactione naſcatur, quo major ſit in corporibus eidem expoſitis ſalium, aliorumque elementorum quantitas, quae ſalibus permixta volatilitatem alkalinam eiſdem impertiri poſſunt. Si enim conſideremus ſtirpes aceſcentes, & acidum in diſtillatione emittentes, poſtquam ſolidis animalium partibus ſubactae in ſanguinem, aut humores converſae ſunt, vix acceſcere (*f*), & parum acidi diſtillando emittere (*g*), ſed fere ſtatim putreſcere, & in diſtillatione copioſum alkali acidi loco praebere; ſi conſideremus alkali ex corporibus putrefactis citius adhuc in diſtillatione prodire (*h*); ſi animadvertamus actione viſcerum, & putredine reliqua ſalia fere omnia deſtrui, nec in corruptorum corporum

(*f*) Macquer elem. de chym. theor. cap. 15. pag. 173. 174., & elem. de chym. pratiq. tom. 2. pag. 377. 380.
(*g*) Id. tom. cit. pag. 381., & ſeq.
(*h*) Id. tom. cit. pag. 378. 379.

Digitized by Google

porum combuſtorum cineribus ullum alkali amplius reperiri (*i*); ſi perpendamus eos humores, qui maximam ſalium quantitatem continent, ut urinam, maximam alkali copiam putreſcendo praebere (*j*), confirmari videtur ea, quam ſequimur, Chymicorum ſententia, qui cenſent ſalia volatilia a reliquis ſalibus ortum ducere, quae vi viſcerum animalium putredine, igne ita immutentur, ut alkalica evadant, nullo ſuperſtite priſtinae formae veſtigio (*k*). Inde vero intelligi poſſet, cur ſalia volatilia putredinem arcere poſſint (*l*), non ſecus, ac reliqua ſalia, quamquam ex putredine ortum ducant: quantitas enim alkalinorum ſalium per putredinem productorum reſpondet quantitati ſalium nativorum praeexiſtentium, quae porro ſalia cum arcendae putredini non ſufficerent, mirum non eſt genitum alkali ejuſdem progreſſui impediendo ineptum fuiſſe: quod ſi nativa ſalia majori copia praexiſtant, videtur utique, & genitum alkali putredinis progreſſum retardaturum: urina enim quae ſalibus copioſe referta eſt, non tam corrumpitur, nec ejuſdem corruptae halitus adeo perniciosi ſunt, quemadmodum aliorum humorum (*m*), quod non aliunde, quam a praeexiſtentium ſalium, & geniti inde alkali copia, & efficacia repetendum eſſe videtur.

18. Urina ſana nonniſi trium dierum intervallo ita putreſcebat, ut cum acidis efferveſceret; veruntamen urina hominis putrida febre laborantis brevi tempore, ſpatio nimirum vigintiquatuor horarum, hujuſmodi alkaleſcentiam obtinuit. Sanguis ejuſdem hominis multo quoque citius, quam ſanguis ab homine pleuritico eductus alkaleſcentiae indi-

(*i*) Id. tom. cit. pag. 380. 381.
(*j*) Pringle Tr. ſur les ſub. ſept., & antiſep. mémoire 1. exper. 2. pag. 161.
(*K*) Macquer l. ult. cit., & tom. eod. pag. 343. 344. 349. 350.
(*l*) Quod, & Pringle teſtatur (l. c. mem. 1. exp. 2. 3.), & ego pluries expertus ſum, & propriis etiam experimentis confirmavit Cl. Gilbertus in diſp. de putred. Lipſ. 1753. §. 7. pag. 13.
(*m*) Pringle loc. cit. ad not. j.

Digitized by Google

indicia oſtendit. Sed haec ſpectant ad aliam claſſem experimentorum, quae in tempus aliud differenda eſſe conſtitui, ut opportunitatem nactus morboſos humores explorare, atque ex phaenomenorum comparatione ea deducere poſſim, quae morborum, eorumdemque indoli detegendae, aut therapejae perficiendae apta videbuntur.

19. Nec vero in graviſſima quaeſtione propriis tantum oculis fidere volui, ſed Clariſs. D. Bruni Anat. Profeſs., & Londinenſem Socium rogavi, ut experimentis meis intereſſet, ut & errores, qua eſt ſolertia, praecaveret, & auctoritate ſua experimentorum veritatem tueretur.

P. S. Doctiſſimus Navier (*n*), quum carnem bubulam vaſis accurate obturatis, ac glutinatis incluſam putrefactioni commiſiſſet in gradu caloris inter nonum, & vigeſimum Thermometri Reaumuriani, poſtquam in liquamen, & putrilaginem reſolutam fuiſſe obſervavit, per vitream retortam cum excipulo accurate glutinatam, arenae balneo diſtillavit, & liquorem clarum, ſubalbidum, ac foetentem primum obtinuit, ex quo caerulea carta, nonnihil rubra facta eſt: hunc tamen liquorem alkalino volatili ſale refertum eſſe comperit, cum ſuperaffuſo alkalici fixi liquore ſpiritus volatiles urinoſi ex miſcella prodierint; aucto deinceps igne, donec retorta candeſceret, diſtillare adhuc continuavit per horae quadrantem ſimilis liquor pauculo oleo imbutus, poſtremo ſal volatilis albus, concretus, vegetationis ſpecie, modica quantitate ad retortae collum depoſitus eſt, & vapores, qui adhuc per horae quadrantem prodierunt oleum craſſum, ambrei coloris ſuppeditarunt. Cum vero laudatus Auctor incorruptam carnem arenae balneo ſimiliter diſtillaſſet, liquor, qui eo calore prodiit, lim-

(*n*) Poſtquam mea haec experimenta in aliquem ordinem diſpoſuiſſem, ut typis committerem Celeb. Navier diſſertationem de oſſium mollitie legendam praebuit Clariſs. Bertrandi, in qua pag. 33., & ſeqq. Clariſs. Viri citata experimenta reperi.

Digitized by Google

limpidus erat, nullumque alkaleſcentiae indicium exhibuit, nec niſi violento igne hujuſmodi demum ſales prodierunt. Quae quidem Clar. Viri experimenta noſtris egregie conſentire videntur: nam & miti caloris gradu ad putreſcentiam uſus eſt, & vaſis exacte obturatis corrumpendam carnem incluſit, ac propterea alkali retinuit, quod liquore primum extillante ſolutum leviſſimo calore prodiit, cum ex integris carnibus, nonniſi per auctam vim ignis demum educeretur (*o*).

(*o*) Idipſum in partibus omnibus animalibus obtinere, ut corruptae leviſſimo caloris gradu alKali diſtillando praebeant, integrae majorem ignis vim requirant, ut id alKali emittant. Clariſs. Macquer docuit Chym. pratiq. loc. cit. ad not. h.

Digitized by Google

FASCICULUS STIRPIUM
Sardiniae in Dioeceſi Calaris lectarum
A Michaele Antonio Plazza
CHIRURGO TAURINENSI,
Quas in uſum Botanicorum recenſet
CAROLUS ALLIONUS.

ACANTHUS foliis ſinuatis inermibus *Linn. ſpec. pl.* 639.
Acanthus ſativus, ſeu mollis Virgilii *C. B. pin.* 383.
Habitat in vinetis circa Calarim.

ACANTHUS foliis pinnatifidis ſpinoſis *Linn. ſp. pl.* 639.
Acanthus aculeatus *C. B. pin.* 383.
Creſcit iiſdem locis.

AEGYLOPS ſpica ovata ariſtis breviore *Linn. ſp. pl.* 1050.
Feſtuca altera capitulis duris *C. B. the.* 151.

AGROSTEMMA glabra foliis lineari-lanceolatis, patalis emarginatis coronatis *Linn. ſp. pl.* 436.
Lychnis foliis glabris calyce duriore *Bocc. ſic.* 27.

ANAGALLIS foliis cordatis amplexicaulibus, caulibus compreſſis *Linn. ſp. pl.* 149.
Anagallis hiſpanica latifolia maximo flore *Tournef. inſt.* 143.

ANTIRRHINUM foliis caulinis lanceolato-linearibus ſparſis: radicalibus rotundis ternis *Linn. ſp. pl.* 615.
Linaria annua purpuro-violacea, calcaribus longis, foliis imis rotundioribus *Magn. monſp.* 159.

ANTIRRHINUM procumbens ramoſum, foliis alternis ovatis acuminatis integerrimus, floribus caudatis axillaribus.
Folia ſuccoſa, glabra, alterna, ſeſſilia, ſupremis anguſtioribus elliptico acuminatis. Pedunculi foliis altiores, ſingulares, uniflori. Flos cyanaeus cum hiatu clauſo. Calcar floris acutum pedunculo ſubaequale, & florem longitudine

aequans

aequans. *Capſula rotunda calyce minor*. *Eritne*? Linaria luſitanica maritima polygalae folio *Tourn. inſt.* 169.

ANTHEMIS caule ramoſo, foliis pinnato-multifidis ſetaceis, calycibus villoſis pedunculatis *Linn. ſp. pl.* 895.

Buphthalmum cotulae folio *C. B. pin.* 134.

APHANES *Linn. ſp. pl.* 123.

Alchemilla minima montana *Col. ecphr.* 145.

APHILLANTHES *Linn. ſp. pl.* 294.

Aphillanthes Monſpelienſium *Lob. adv.* 190.

ARBUTUS caule erecto, foliis glabris ſerratis, baccis polyſpermis *Linn. ſp. pl.* 395.

Arbutus folio ſerrato *C. B. pin.* 460.

Abunde in montibus ſeptem Fratrum.

ARENARIA foliis filiformibus, ſtipulis membranaceis vaginantibus *Linn. ſp. pl.* 423.

Alſine ſpergulae facie minor, ſeu ſpergula minor ſub caeruleo flore *C. B. pin.* 251.

ARISTOLOCHIA foliis cordatis ſubſeſſilibus, obtuſis, caule infirmo, floribus ſolitariis *Linn. ſp. pl.* 962.

Ariſtolochia rotunda flore ex purpura nigro *C. B. pin.* 307.

Provenit in agro di Siurgius.

ARUM a caule foliis cordato-oblongis, ſpatha bifida, ſpadice incurvo *Linn. ſp. pl.* 966.

Ariſarum latifolium *Cluſ. hiſt.* 2. *p.* 73.

Circa Calarim, *& in agro* S. Pantaleonis.

ASPHODELUS caule nudo, foliis ſtrictis ſubulatis ſtriatis ſubfiſtuloſis *Linn. ſp. pl.* 309.

Aſphodelus minor *Cluſ. hiſt.* 1. *p.* 197.

ASPHODELUS caule nudo, foliis enſiformibus carinatis laevibus *Linn. ſp. pl.* 310.

Aſphodelus albus ramoſus mas *C. B. pin.* 28.

Aſphodelus albus non ramoſus *C. B. pin.* 28.

BARTSIA foliis ſuperioribus alternis ſerratis, floribus lateralibus *Linn. ſp. pl.* 602.

Digitized by Google

Alectorolophos italica luteo-pallida *Barrel. rar. ic.* 665.

Bartsia foliis oppoſitis lanceolatis obtuſe ſerratus *Linn. ſp. pl.* 602.

Trixago apula unicaulis *Col. ecphr.* 1. *p.* 199.

Bulbocodium foliis lanceolatis *Linn. ſp. pl.* 294.

Colchicum vernum Hiſpanicum *C. B. pin.* 69.

Prope oppidum Ulaſſay *ſecus torrentem.*

Bufonia *Linn. ſp. pl.* 123.

Herniaria anguſtiſſimo gramineo folio erecta *Magn. hort.* 97.

Bunias ſiliculis ovatis laevibus ancipitibus *Linn. ſp. pl.* 670.

Eruca maritima Italica ſiliqua haſtae cuſpidi ſimili *C. B. pin.* 99.

In ſabuloſis mari proximis, & maxime ſtagnis exſiccatis.

Bupleurum involucellis pentaphillis acutis: univerſali diphillo, foliis lanceolatis petiolatis *Linn. ſp. pl.* 237.

Bupleurum folio ſubrotundo ſive vulgatiſſimum *C. B. pin.* 278.

Bupleurum caule dichotomo ſubnudo, involucris minimis acutis *Linn. ſp. pl.* 238.

Bupleurum folio rigido *C. B. pin.* 278.

Utrumque inter ſegetes agri di Sardara.

Buphthalmum calycibus acute folioſis, ramis alternis, foliis lanceolatis amplexicaulibus integerrimus *Linn. ſp. pl.* 903.

Aſter luteus foliis ad florem rigidis *C. B. pin.* 266.

Campanula caule dichotomo, foliis ſeſſilibus utrinque dentatis *Linn. ſp. pl.* 169.

Erini ſeu rapunculi minimum genus *Col. phytob.* 122.

Capparis aculeata *Linn. ſp. pl.* 503.

Capparis ſpinoſa fructu minore, folio rotundo *C. B. pin.* 480.

Rupes circa Calarim *inhabitat.*

Celtis foliis ovato-lanceolatis *Linn. ſp. pl.* 1043.

Lotus fructu cerafi *C. B. pin.* 447.

Cen-

Digitized by Google

Centaurea calycibus laevibus, ſquammis ovatis mucronatis, foliis ciliato-ſpinoſis.

Caulis erectus, ſtriatus, ramoſus, durus, pedalis, aut paullo elatior ramis unico flore terminatis. Folia prima dentato-lyrata; reliqua integra, lineari-lanceolata: omnia denticulis ſpinulas exerentibus, & pinnatis inſtructa, erecta, firmula, glabra. Flos luteus. Calix ex ſquammis laevibus, arcte imbricatis, in ſpinulam brevem abeuntibus.

Cerastium floribus pentandris petalis integris *Linn. ſp. pl.* 439.

Cistus arboreſcens, foliis ſeſſilibus utrinque villoſis rugoſis, inferioribus ovatis baſi connatis; ſummis lanceolatis *Linn. ſp. pl.* 514.

Ciſtus mas anguſtifolius *C. B. pin.* 464.

Cistus arboreſcens, foliis oblongis tomentoſis incanis ſeſſilibus ſupra avenis, alis nudis *Linn. ſp. pl.* 524.

Ciſtus mas, folio oblongo incano *C. B. pin.* 464.

Cistus arboreſcens, foliis ovatis petiolatis utrinque hirſutus, alis nudis *Linn. ſp. pl.* 524.

Ciſtus foemina folio ſalviae *C. B. pin.* 464.

Cistus herbaceus exſtipulatus, foliis oppoſitis trinerviis, racemis ebracteatis. *Linn. ſp. pl.* 526.

Helianthenum flore maculoſo *Col. ecphr.* 2. *p.* 78.

Omnes hi ciſti ſicca paſcua amant, & abunde naſcuntur circa Oppidum Villanova Tullo.

Clematis cirrhis ſcandens *Linn. ſp. pl.* 544.

Clematis peregrina foliis pyri inciſis: nunc ſingularibus, nunc ternis *Tournef. cor.* 20.

Clypeola ſiliculis unilocularibus monoſpermis *Linn. ſp. pl.* 652.

Jonthlaſpi minimum ſpicatum lunatum *Col. ecphr.* 1. *p.* 281.

Convolvulus foliis ſagittatis utrinque acutis, pedunculis unifloris *Linn. ſpec. pl.* 153.

Convolvulus minor arvenſis *C. B. pin.* 294.

Digitized by Google

Convolvulus foliis ſagittatis poſtice truncatis, pedunculis unifloris *Linn. ſp. pl.* 156.

Convolvulus major albus *C. B. pin.* 294.

Convolvulus foliis palmatis cordatis ſericeis: lobis repandis, pedunculis bifloris *Linn. ſp. pl.* 156.

Convolvulus argenteus folio altheae *C. B. pin.* 194.

Crithmum foliolis lanceolatis carnoſis *Linn. ſp. pl.* 246.

Crithmum, ſeu foeniculum maritimum minus *C. B. pin.* 288.

Ad rupes, quæ mare ſpectant.

Croton foliis rhombeis repandis, capſulis pendulis, caule herbaceo *Linn. ſp. pl.* 1004.

Ricinoides, ex qua paratur Tourneſol Gallorum *Tourn. Niſſole act. Pariſ.* 1712. *p.* 337.

Abunde in arvis.

Cyclaminus foliis cordatis acutis anguloſe dentatis.

Cyclamen folio anguloſo *C. B. pin.* 308.

Ubique in celſis montibus.

Folia tenuiora, quam in vulgari cyclamino, & ampliora angulis, ſeu dentibus breviſſima ſpinula notatis. Corolla purpurea retroflexa.

Cynosurus paniculae ſpiculis ſterilibus pendulis ternatis, floribus ariſtatis *Linn. ſp. pl.* 73.

Gramen panicula pendula aurea *C. B. the.* 33.

Cytisus floribus lateralibus, foliis hirſutis, caule erecto ſtriato *Linn. ſp. pl.* 740.

Cytiſus monſpeſſulanus medicae folio, ſiliquis denſe congeſtis, & villoſis *Tourneſ. inſt.* 648.

Daphne floribus ſeſſilibus aggregatis axillaribus, foliis ovatis utrinque pubeſcentibus norvoſis *Linn. ſp. pl.* 356.

Thymelaea foliis candicantibus, & ſerici inſtar mollibus *C. B. pin.* 463.

Abunde circa Ulaſſay.

Draba caule non ramoſo, foliis cordatis acutis dentatis ſeſſilibus.

Cau-

Caulis ſimpliciſſimus, pedalis, in lungo racemo floriger. Folia piloſo-hiſpida acute terminata, & acutis dentibus praedita, non amplexicaulia.

Erica antheris bicornibus incluſis, corollis companulatis longioribus, foliis quaternis patentiſſimis, caule ſubarboreo tomentoſo *Linn. ſp. pl.* 353.

Erica maxima alba *C. B. pin.* 485.

Ervum pedunculis ſubbifloris, ſeminibus globoſis quaternis *Linn. ſp. pl.* 738.

Vicia ſegetum ſingularibus ſiliquis glabris *C. B. pin.* 345.

Eryngium foliis radicalibus ſubrotundis plicatis ſpinoſis, capitulis pedunculatis *Linn. ſp. pl.* 233.

Eryngium maritimum *C. B. pin.* 386.

Eryngium foliis radicalibus planis quadratis ſublobatis, caulinis digitatis, pedunculo terminali.

Eryngium capitulis pſillii *Bocc. rar.* 88.

Copioſe in paſcuis.

Radix tuberoſa obſcura, ex qua folia plura longe petiolata plana dentato-ſpinoſa, quadrato-orbiculata nunc integra, nunc ſubtriloba. Prima caulina profundius triloba, aut quinqueloba, adhuc petiolata; quae, ſequuntur, ſeſſilia, quinquedigitata foliolis lineari-lanceolatis, & ciliato-ſpinoſis. Ex ſummis foliorum alis, aut ſumma planta pedunculus floriger cum uno, alterove ſeſſili folio.

Euphorbia umbella trifida: dichotoma involucellis lanceolatis, foliis linearibus *Linn. ſp. pl.* 456.

Tithymalus ſive eſula exigua *C. B. pin.* 291.

Euphorbia umbella ſubquinquefida ſimplici, involucellis ovatis: primariis triphillis, foliis oblongis integerrimis, caule fruticoſo *Linn. ſp. pl.* 457.

Tithymalus maritimus ſpinoſus *C. B. pin.* 291.

In monte Eſterſili *frequens.*

Ferula foliolis linearibus longiſſimis ſimplicibus *Linn. ſp. pl.* 247.

Ferula

Digitized by Google

Ferula femina Plinii *C. B. pin.* 148.

Fumaria ſubcirrhoſa ex alis floſigera, ſegmentis foliorum bilobis, pericarpiis rotundis monoſpermis.

Abunde circa Calarim.

Caules erecti, ſpithamaei, ſulcati, laeves, ramoſi extremis ramis quandoque in cirrhum deſinentibus. Folia petiolata, glauca, profunde, & inaequaliter trifida ſegmentis bilobis ovalibus cum ſpinula, alterna, ſed ad ramorum ortum oppoſita. Floralium ſegmentum unum ſaepe bilobum, reliqua integra ſunt. Nudus pedunculus foliis altior flores fert fumariae officinalis in brevem ſpicam congeſtos.

Galium foliis quaternis ovatis, aculeato-ciliatis, feminibus hiſpidis *Linn. ſp. pl.* 108.

Rubia ſemine duplici hiſpido latis, & hirſutis foliis *Bocc. rar.* 6.

Folia glabra, vix nervoſa. Panicula axillaris, cauli perpendicularis.

Galium foliis quaternis ovatis laevibus obtuſis, panicula dichotoma, feminibus hiſpidis *Linn. ſp. pl.* 108.

Rubia quadrifolia ſemine duplici hiſpido *Bauh. hiſt.* 3. *p.* 718.

Galium foliis verticillatis lineari-ſetaceis, pedunculis folio longioribus *Linn. ſp. pl.* 107.

Galium nigro-purpureum montanum tenuifolium *Col. ecphr.* 1. *p.* 298.

Geranium pedunculis multifloris, calycibus pentaphyllis, floribus pentandris, foliis cordatis ſublobatis *Linn. ſp. pl.* 680.

Geranium folio altheae *C. B. pin.* 318.

Geranium pedunculis multifloris, calycibus pentaphillis, floribus pentandris, foliis pinnatis acutis ſinuatis *Linn. ſpec. pl.* 680.

Geranicum acu longiſſima *C. B. pin.* 319.

Digitized by Google

GERANIUM pedunculis bifloris, calycibus pyramidatis angulatis rugoſis, foliis quinquelobis rotundatis *Linn. ſpec. pl.* 682.

Geranium lucidum ſaxatile *C. B. pin.* 318.

GERANIUM pedunculis bifloris, foliiſque rameis alternis, caule ramoſo diffuſo, calycibus muticis *Linn. ſp. pl.* 682.

Geranium columbinum villoſum petalis bifidis purpureis *Vaill. Pariſ.* 79. *t.* 15. *f.* 3.

GERANIUM pedunculis bifloris, foliis quinquepartito-multifidis angulatis: laciniis acutis, capſulis glabris, calycibus ariſtatis *Linn. ſp. pl.* 682.

Geranium foliis ad nervum quinquefidis, pediculo longiſſimo, caule proſtrato *Hall. helv.* 367.

GENTIANA dichotoma, ramis unifloris, corollis quinquefidis infundibuli-formibus, calycibus membranaceis.

Centaurium luteum novum *Col. ecphr.* 2. 77.

Caules ad ſummum ſpithamaei, ſubrotundi, glabri. Folia ſeſſilia, oppoſita, ovata. Caules irregulariter dichotomi ſemel, aut bis. Corolla lutea ſegmentis ovato acutis, & tubo calycem ſuperante. Tubi longitudo bis, & ultra corollae limbum metitur. Calix decem ſtriatus, membranaceo-transparens ſegmentis capillaribus.

GLADIOLUS foliis enſiformibus, floribus diſtantibus *Linn. ſp. pl.* 36.

Gladiolus floribus uno verſu diſpoſitis *C. B. pin.* 41.

GNAPHALIUM caule erecto dichotomo, floribus pyramidatis axillaribus *Linn. ſp. pl.* 857.

Gnaphalium minimum alterum noſtras ſthoechadis citrinae foliis tenuiſſimis *Pluk. alm.* 172. *t.* 298. *f.* 2.

GNAPHALIUM caule ſimpliciſſimo, foliis amplexicaulibus lanceolatis denticulatis, corymbo compoſito terminali.

Circa oppidum Villanova Tullo.

Tomentoſa ſtirps eſt palmaris altitudinis. Folia ſubvirent erecta, mollia, ambitu minutim & inaequaliter denticulato.

Flo-

Flores rotundi parvi ex citrino, & viridi ſubrubentes in denſum corymbum conglobati.

Gypsophila foliis mucronatis recurvatis, floribus aggregatis *Linn. ſp. pl.* 406.

Caryophillus ſaxatilis, ericae foliis umbellatis corymbis *C. B. pin.* 211.

In promontorio S. Eliae *circa* Calarim.

Herniaria hirſuta *Bauh. hiſt.* 3. *p.* 379.

Hesperis caule erecto ramoſo, foliis cordatis amplexicaulibus ſerratis villoſis *Linn. ſp. pl.* 664.

Leucojum minus rotundifolium flore purpureo *Barrel. ic.* 876.

Heliotropium foliis ovatis tomentoſis integerrimis rugoſis, ſpicis conjugatis *Linn. ſp. pl.* 130.

Heliotropium majus Dioſcoridis *C. B. pin.* 253.

Illecebrum floribus bracteis nitidis occultatis, capitulis terminalibus, caule erecto *Linn. ſp. pl.* 207.

Paronychia narbonenſis erecta *Tournef. inſt.* 508.

Juniperus foliis quaternis patentibus ſubulatis mucronatis *Linn. ſp. pl.* 207.

Juniperus major bacca reſuſcente *C. B. pin.* 489.

Juniperus foliis oppoſitis erectis decurrentibus oppoſitionibus pixidatis *Linn. ſp. pl.* 1039.

Sabina folio cupreſſi *C. B. pin.* 487.

Lagurus ſpica ovata *Linn. ſp. pl.* 81.

Gramen alopecuroides ſpica rotundiore *C. B. the.* 56.

Lathyrus pedunculis unifloris, cirrhis diphillis, leguminibus ovatis compreſſis: dorſo canaliculatis *Linn. ſpec. pl.* 740.

Lathyrus ſativus flore purpureo *C. B. pin.* 344.

Lathyrus pedunculis unifloris, cirrhis aphillis, ſtipulis ſagittato-cordatis *Linn. ſp. pl.* 279.

Vinea lutea foliis convolvuli minoris *C. B. pin.* 345.

Lapsana calycibus fructus torulosis depreſſis obtuſis ſeſſilibus *Linn. ſp. pl.* 811.

Chon-

Chondilla verrucaria foliis cichorii viridibus *C. B. pin.* 130.
Ubique ad vias.

Lapsana calycibus fructus undique patentibus: radiis ſubulatis, foliis lyratis *Linn. ſp. pl.* 812.

Rhagadiolus lapſanæ foliis *Tournef. cor.* 36.

Linum calycibus acuminatis, foliis lanceolatis ſparſis ſtrictis ſcabris acuminatis, caule tereti baſi ramoſo *Linn. ſp. pl.* 278.

Linum ſylveſtre caeruleum folio acuto *C. B. pin.* 214.

Linum calycibus acutis, foliis lineari-lanceolatis alternis; paniculae pedunculis biſloris *Linn. ſp. pl.* 279.

Linum ſylveſtre minus flore luteo *C. B. pin.* 214.
In paſcuis S. Pantaleonis.

Linum calycibus, foliiſque lanceolatis ſtrictis mucronatis: margine ſcabris *Linn. ſp. pl.* 279.

Lithoſpermum linariae folio monſpelienſium *C. B. pin.* 259.

Lotus capitulis aphillis, foliis ſeſſilibus quinatis *Linn. ſp. pl.* 776.

Dorychnium monſpelienſium *Lob. ic.* 51.

Lupinus calycibus alternis appendiculatis: labio ſuperiore bipartito, inferiore integro *Linn. ſp. pl.* 721.

Lupinus anguſtifolius caeruleus elatior *Ray hiſt.* 908.

Mollugo foliis quaternis obovatis, panicula dichotoma *Linn. ſp. pl.* 89.

Anthillis marina alſinefolia *C. B. pin.* 282.

Myosotis ſeminibus nudis: foliorum apicibus calloſis *Linn. ſp. pl.* 131.

Echium ſcorpioides paluſtre *C. B. pin.* 254.

Oenante umbellularum pedunculis marginalibus longioribus ramoſis maſculis *Linn. ſp. pl.* 254.

Oenanthe prolifera apula *C. B. pin.* 163.

Ononis trifolia viſcoſa, hirſuta, pedunculis congeſtis, floribus pendulis *Sauv. monſp.* 190.

Digitized by Google

Anonis puſilla villoſa, & viſcoſa purpuraſcente flore *Tourn. inſt.* 408.

Folia cuneiformia in apice denticulata, trifoliata; ſed floralia ſimplicia. Stipulae lanceolatae, non ſetaceae. Spicae ramos, & caulem terminant. Flores ex alis ſtipularum prodeunt ſingulares. Pedunculus petiolo longior. Flos calyce minor reflexus. Fructus longitudine calycis: ſemina nigra angulata decem circiter.

Ononis pedunculis unifloris filo terminatis, foliis ſimplicibus *Linn. ſp. pl.* 718.

Anonis lutea viſcoſa latifolia minor, flore pallido *Barrel. ic.* 1239.

Anonis viſcoſa ſpinis carens lutea latifolia annua *Magn. monſp.* 21.

Folia brevis petioli ope inſidentia retangulae ſtipulae, orbiculata, aut oblonga, minutim denticulata. Pedunculi uniflori, axillares, ſtipula longiores, terminati filo folia ſuperante. Flos pentaphillo calyce minor. Fructus longior calyce, aequalis ſtipulae ſemina recondit tria, aut quatuor reniformia. Planta tota villoſa eſt.

Ornithopus foliis pinnatis, leguminibus ſubarcuatis *Linn. ſp. pl.* 743.

Ornithopodium minus *C. B. pin.* 350.

Othonna foliis pinnatifidis tomentoſis: laciniis ſinuatis; caule fruticoſo *Linn. ſp. pl.* 927.

Jacobaea maritima *C. B. pin.* 131.

Ad maris littus abunde.

Passerina foliis carnoſis extus glabris, caulibus tomentoſis *Linn. ſp. pl.* 559.

Thymelaea tomentoſa foliis ſedi minoris *C. B. pin.* 463.

Phillyrea foliis cordato-ovatis ſerratis *Linn. ſp. pl.* 8.

Phillyrea folio leviter ſerrato *C. B. pin.* 476.

Plantago foliis lineari-lanceolatis hirſutis, ſpica cylindrica erecta, ſcapo tereti foliis longiore *Linn. ſp. pl.* 114.

Flo-

Digitized by Google

Holoſteum hirſutum albicans minus *C. B. pin.* 190.
PLANTAGO caule ramoſo, foliis integerrimis, ſpicis folioſis *Linn. ſp. pl.* 115.
Pſyllium majus erectum *C. B. pin.* 191.
PLUMBAGO foliis amplexicaulibus *Linn. ſp. pl.* 151.
Lepidium dentellaria dictum *C. B. pin.* 197.
POLYGONUM floribus pentandris trigynis axillaribus, foliis lanceolatis, caule ſtipulis obtecto fruticoſo *Linn. ſp. pl.* 361.
Polygonum maritimum latifolium *C. B. pin.* 280.
POLYPODIUM fronde bipinnata: pinnis lunulatis dentatis, ſtipite ſtrigoſo *Linn. ſp. pl.* 1090.
Filix aculeata major *C. B. pin.* 358.
POTERIUM inerme caulibus ſubangulofis *Linn. ſp. pl.* 994.
Pimpinella ſanguiſorba minus hirſuta *C. B. pin.* 160.
POTERIUM ſpinis ramoſis *Linn. ſp. pl.* 994.
Poterio affinis, foliis pimpinellae, ſpinoſa *C. B. pin.* 388.
Abunde circa Calarim.
PSORALEA foliis omnibus ternatis: pedunculis ſpicatis folio longioribus *Linn. ſp. pl.* 763.
Trifolium bitumen redolens *C. B. pin.* 327.
Ubique circa Calarim.
QUERCUS foliis ovato-oblongis indiviſis, ſerratiſque, cortice integro *Linn. ſp. pl.* 995.
Ilex oblongo ſerrato folio *C. B. pin.* 424.
Ubique frequens.
QUERCUS foliis ovato-oblongis indiviſis ſerratis ſubtus tomentoſis, cortice rimoſo fungoſo *Linn. ſp. pl.* 995.
Suber latifolium ſempervirens *C. B. pin.* 424.
QUERCUS foliis ovatis indiviſis ſpinoſo-dentatis glabris *Linn. ſp. pl.* 995.
Ilex aculeata cocciglandifera *C. B. pin.* 425.
Abunde loco dicto Pedra de Fogu.

Digitized by Google

Reseda foliis lanceolatis integris, calycibus quadrifidis *Linn. ſp. pl.* 448.

Luteola herba ſalicis folio *C. B. pin.* 100.

Reseda foliolis alternis integerrimis, fructibus tetragynis.

Reſeda minor inciſis foliis *Barrel. ic.* 587.

Reſeda foliis calcitrapae flore albo *Mor. hort. bleſ.*

Rubia foliis ſenis *Linn. ſp. pl.* 109.

Rubia ſylveſtris aſpera *C. B. pin.* 33.

Rumex floribus hermaphroditis, valvulis dentatis nudis reflexis *Linn. ſp. pl.* 336.

Acetoſa ocymi folio Neapolitana *C. B. pin.* 114.

Rumex floribus dioicis, foliis lanceolato-haſtatis *Linn. ſp. pl.* 338.

Acetoſa arvenſis lanceolata *C. B. pin.* 114.

Sagina caule erecto unifloro *Linn. ſp. pl.* 128.

Alſine verna glabra *Vaill. pariſ.* 6. *t.* 3. *f.* 2.

Saxifraga foliis caulinis palmato-lobatis, caulinis ſeſſilibus, caule ramoſo bulbifero *Linn. ſp. pl.* 403.

Saxifraga bulboſa altera bulbifera montana *Col. ecphr.* 1. *p.* 318.

Scandix ſeminibus ovatis hiſpidis, corollis uniformibus, caule laevi *Linn. ſp. pl.* 257.

Myrrhis ſylveſtris aequicolorum *Col. ecphr.* 1. *p.* 110.

Scandix ſeminibus ſubulatis, hiſpidis, floribus roſtratis, caulibus laevibus *Linn. ſp. pl.* 257.

Scandix cretica minor *C. B. pin.* 152.

Scrophularia, foliis difformibus, pedunculis axillaribus aggregatis *Linn. ſp. pl.* 620.

Scrophularia foliis laciniatis *C. B. pin.* 236.

Scrophularia foliis cordatis: ſuperioribus alternis, pedunculis axillaribus bifloris *Linn. ſp. pl.* 621.

Scrophularia urticae folio *C. B. pin.* 236.

Serapias bulbis ſubrotundis, nectarii labio trifido acuminato petalis longiore *Linn. ſp. pl.* 950.

Or-

Orchis montana italica flore ferrugineo, lingua oblonga *B. C. pin.* 84.

Sherardia foliis omnibus verticillatis, floribus terminalibus *Linn. ſp. pl.* 102.

Rubeola arvenſis repens caerulea *C. B. pr.*

Silene hirſuta, petalis emarginatis, fructibus erectis alternis hirſutis ſeſſilibus *Linn. ſp. pl.* 417.

Viſcago caraſtei foliis, vaſculis erectis ſeſſilibus *Dill. elth.* 416. *t.* 309.

Sison foliis caulinis ſubcapillaribus *Linn. ſp. pl.* 252.

Arumi parvum foliis foeniculi *C. B. pin.* 159.

Spartium foliis ternatis, ramis angulatis ſpinoſis *Linn. ſp. pl.* 709.

Acacia trifolia *C. B. pin.* 392.

Taxus foliis approximatis *Linn. ſp. pl.* 1040.

Taxus *C. B. pin.* 505.

Occurrit in agro Ulaſſey; *de caetero rarus.*

Teucrium foliis integerrimis ovatis utrinque acutis, racemis ſecundis villoſis *Linn. ſp. pl.* 564.

Marum cortuſi *J. B. p.* 242.

Teucrium . . . .

Polium maritimum erectum monſpeliacum *C. B. pin.* 221.

Polium monſpeſſulanum *J. B.* 3. 299.

Thlaspi ſiliculis ſubrotundis, foliis amplexicaulibus cordatis ſubſerratis *Linn. ſp. pl.* 646.

Thlaſpi arvenſe perfoliatum majus *C. B. pin.* 106.

Thymus erectus, foliis revolutis ovatis, floribus verticillato-ſpicatis *Linn. ſpec. pl.* 591.

Thymus vulgaris folio latiore *C. B. pin.* 219.

Frequens circa Calarim.

Tordylium umbella conferta, foliolis ovato-lanceolatis pinnatifidis *Linn. ſp. pl.* 241.

Caucalis ſemine aſpero, floſculis rubentibus *C. B. pr.* 80.

Ad foſſas prope oppidum Gerey.

Tor-

Digitized by Google

Tordylium umbellis ſimplicibus ſeſſilibus, ſeminibus exterioribus hiſpidis *Linn. ſp. pl.* 240.

Caucalis nodoſa echinato ſemine *C. B. pr.* 80.

Ibidem.

Tordylium alterum majus λειοκαρπος *Col. ecphr.* 122.

Trifolium ſpicis villoſis ovalibus, dentibus calycinis ſetaceis aequalibus *Linn. ſp. pl.* 768.

Trifolium arvenſe humile ſpicatum, ſive Lagopus *C. B. pin.* 328.

Trifolium ſpicis ovalibus imbricatis, vexillis deflexis perſiſtentibus, calycibus nudis, caule erecto *Linn. ſp. pl.* 772.

Trifolium agrarium *Dod. pemp.* 576.

Trifolium caulibus ſimplicibus, ſpicis piloſis aphillis mollibus ſubrotundis, foliolis cordatis.

Trifolium alopecurum ſpica globoſa *Barrel. ic.* 1188.

Caules rotundi, villoſi, ſpithamaei. Stipula ampla in duos lobos quadrato-ovales denticulatos diviſa educit petiolum biunciale, quod jungit tria foliola denticulata, ex cuneiformi cordata, oxalidi *ſimilia. Spica ſubrotunda, compreſſa, terminalis. Calyces ſtriati, ſericeo villoſi. Dentes calycini ſubaequales patentes, & tubo calycis longiores. Flos polypetalus calyci ſubaequalis.*

Turritis foliis omnibus hiſpidis, caulinis amplexicaulibus *Linn. ſp. pl.* 666.

Eryſimo ſimilis hirſuta non laciniata alba *C. B. prodr.* 42.

Veronica floribus ſolitariis, foliis cordatis inciſis pedunculo longioribus *Linn. ſp. pl.*

Alſine veronicae foliis, floſculis cauliculis adhaerentibus *C. B. pin.* 250.

Veronica floribus ſolitariis, foliis cordatis planis quinquelobis *Linn. ſp. pl.* 13.

Alſine hederulae folio *C. B. pin.* 250.

Viburnum foliis integerrimis ovatis: ramificationibus ſubtus villoſo-glandulosis *Linn. ſp. pl.* 267.

Lau-

Digitized by Google

Laurus ſylveſtris corni foeminae foliis ſubhirſutis *C. B. pin.* 461.

Vicia pedunculis multifloris, foliolis reflexis ovatis mucronatis, ſtipulis ſubdentatis *Linn. ſp. pl.* 734.

Vicia maxima dumetorum *C. B. pin.* 385.

Vicia leguminibus ſeſſilibus ſubbinatis erectis, foliis retuſis, ſtipulis notatis *Linn. ſp. pl* 736.

Vicia ſativa vulgaris ſemine nigro *C. B. pin.* 344.

Viola acaulis foliis cordatis, ſtolonibus reptantibus *Linn. ſp. pl.* 935.

Viola martia purpurea flore ſimplici odoro *C. B. pin.* 119.

Rara in Sardinia *planta creſcit in agro* Hierſu.

De Glanduloſo ovarii corpore, de Utero gravido, & placenta.

OBSERVATIONES
AMBROSII BERTRANDI.

VEteres Anatomici obſervationibus deſtituti de generationis opere parum, aut nihil intellexerunt; atque in ſumma rei obſcuritate poſteros vix aliquid eſſe intellecturos, niſi potius modos operis ſequantur, pene deſperandum eſt; Harvejus hanc methodum primus amplificavit, quam ipſe quum ſequerer non nullas obſervationes cumulare contigit, quas modo nudas exponam. Primae inſtitutae ſunt circa corpora ovariorum, ut vocant glanduloſa; neque de his, quae ſatis vulgaria ſunt, tranſcribam. Quaerebant Phyſiologi non nulli, an in virginibus intemeratis comperirentur, nec ita facile, atque conſtanter reſpondebant Anatomici. Santorinus vero per conjecturam rem adeo invexit, ut virginum morbos aliquos uteri a praecoci, & vehementi ipſorum intumeſcentia repetendos eſſe exiſtimaverit. Cl. Morgagnius rem maxime cohibuit, ut nullum hujuſmodi corpus in virginibus, quod cum iis nuptarum comparari poſſet, numquam obſervaviſſe ſcripſerit (in epiſt. ad me dat. die XIII. Novembr. 1749.) Ego vero in puellis a decimo quarto ad vigeſimum annum, quas non magis tranſactae vitae genus, quam partium genitalium intemerata integritas, & plenitudo virgines deceſſiſſe indicabant, in ovariis ſtigmata, ſeu granula quaedam obſervavi, quae corporum glanduloſorum rudimenta referrent; in aliis porro adeo perfecta, & turgentia vidi, ut totam amplitudinem ſuam acquiſiviſſe facile putarem; imo in robuſta, & ſucciplena puella hujuſmodi corpus inveni, cujus papilla gan-

Digitized by Google

gangraena eſſet correpta, idque totum ſanguine atro oppletum.

Corpora hujuſmodi glanduloſa in puellis veluti in maſculis ſemen excitare crediderim; veſiculae ſeminales in his dilatantur, ſemineque recens affluente replentur ad XII., vel XIV. vitae annum magis, vel non ita cito, eo quidem tempore, quo ephoebi pubertatem attingunt, nutritionis materia ultra corporis incrementi rationem in his tunc redundante, atque in prolificum ſemen evadente, ſiquidem nutritio, & generatio, idem pene naturae opus ſint: Malpighius frequentiſſime in vitulis nuper natis unam, aut alteram veſiculam inſignem deprehendiſſe ſcripſit, cui lutea ſubſtantia graminis inſtar adnaſcebatur; ego vero in animantibus hujus generis, atque aetatis flaveſcere vidi, non autem veluti adoriente lutea ſubſtantia, ſed potius tinctura, quae facile abſtergeretur, aut equidem ſolidam ſubſtantiam non comperi, quam veluti lutei corporis rudimentum aſſeverare poſſem, nec porro veſiculas adeo inſignes in his potui deprehendere; aſperam, leviterque tuberoſam ſentiebam ovarii ſuperficiem, veſiculas non ſatis bene diſtinguebam. Nihilo ſecius veluti florum uterum undique, & in ſolido creſcere hujuſmodi corpora oſtendam, ſi primum qualia ſint, quando plena, perfectaque inveniuntur, indicavero.

Glandem referunt, quae profunde in ovario infixa papillam ad ejuſdem ſuperficiem porrigit, veluti ſegmentum minoris ſpherae majori appoſitum, & acretum: mammae papillae comparaveris; hujuſmodi papilla ſaepius bene devoluta, terminataque videtur, alias nulla eſt, atque glandis ipſa convexitas aliqua parte protuberat, aſſas verrucam excisam, minus bene per ambitum terminatam inveniebam. Ovarium in tranſverſum ovatum, anterius, poſteriuſque compreſſum eſt; ad latus externum, ut plurimum germinat corpus luteum, etſi in quacumque parte iidem inveniatur;

niatur; in Vacca frequentiſſime maximam ovarii partem occupat, totum occupaſſe non ſemel vidi; in humanis ciceris, aut mediocris fabae craſſitiem non raro excedit, in illis olivam refert, aut cераſum majus, in pecude, aut ſcropha humanorum amplitudinem ſequitur, aut parum ſuperat.

Simplex, & unum ut plurimum eſt, rariſſime duo in eodem ovario, aut unum in utroque reperitur. At vero, quum praeſens fuerit amplum, plenumque corpus luteum, alia minora quandoque occurrunt circumſcripta, terminataque, vel tanquam, quod magis raro vidimus, majoris continuatas appendices; rariſſime non invenimus maculas obſcuras cinereas ſubluteas, vel etiam nitide croceas profunde reconditas, aut veluti granula, aut papulas, quae mox ſub ovarii tunica transparebant, aut etiam turgebant; in beſtiis corpus luteum plenum, perfectumque perpetuo in eo reperiebatur ovario, quod ex latere eodem erat cornu gravidi, atque licet multiparae ſint, numerus tamen luteorum corporum nequaquam ex embryonum numero eſt.

Tunicam habent ſat craſſam, renitentemque, quae vaſculis plurimis ſanguineis obducitur, eaque ſpermaticorum, uterinorumque fuiſſe ſoboles comperimus; venae magis, quam in aliis corporis partibus arteriarum amplitudinem excedunt. Exterius communi ovarii tunica, quae tenuvior fit, obvolvitur, & cooperitur, quae & in id ipſum continuari videtur, circum circum qua parte ovario innititur fibris rubellis, compactis, reticulatis obducitur, quibus illud opus tribuerunt Anatomicorum aliqui, ut premerent, urgerentque ovulum foras e ovario in Fallopianam dictam tubam.

Veſiculas, ſeu ut ajunt, ova corpore glanduloſo increſcente decreſcere, & abſumi ſcripſerunt; ipſe quidem alterum ovarium in corpus luteum evaſiſſe nullis, aut pauciſſimis veſiculis duas veſiculas inſigniter turgentes obſervavi in quodam luteo, ut ita dicam, ovario, alias plures uſque ad viginti, & ultra, etſi corpus luteum non leviter

tur-

turgeret. Vidi non raro, quod tumente altero ovario ob corpus luteum, & veſiculas ſat copioſas, alterum exiguum eſſet, & veluti extenuatum, idque ſaepius contigit: quae in ovario ſunt reliquae veſiculae, luteo ut plurimum adjacent corpori, aliquas vidi, ut ſingula enarrem, ipſi papillae inhaerentes; memorata papilla ſaepiſſimae ad verticem foraminulo, quod uſque in fundum corporis lutei continuatur, ductum ideo, ſeu canalem efformans, perforatur. Hujuſmodi canalis membrana fit ſubcinerea, aut albida, cujus appendices in latera ſparguntur, affiguntur que, ſeu continuantur eidem membranae exteriori corporis lutei. Non autem raro hujuſmodi membrana vix apparet, aut etiam deficere videtur, vel etiam nullo pacto pertuſum obſervatur luteum corpus, etſi per axim exciſum cavitatis, ceu ſinuli, qui niſi potius diſtrahendo fiat, in ipſo, ut ita dicam, parenchimate veſtigium videatur. Quandoque per tubum aëre quodam modo diſtendi poterat corpus luteum, compreſſum liquorem limpidum, mox magis craſſum, ſubcinereum, aut leviter croceum extillabat. Nunquam vero cavitatem adeo patentem, & amplam invenimus, quae piſum poſſet continere, ut aſſeveravit Malpighius.

Hujuſmodi corpus fruſtulis, & quaſi lobulis componi ſcripſerunt, ſtructuram ipſius renibus, ut vocant, ſuccenturiatis comparabant, varicoſis propaginibus lutei corporis conflatam, quaſi adipis minima fruſtula. Dum haec ſcribo pluſquam triginta corpora glanduloſa alia recentia, alia macerata, alia in fruſtula exciſa ob oculos habeo, atque ut potius dydymo comparem analogiae cujuſdam ratione adducor: diviſo itaque per axim verticalem, aut tranſverſim corpore luteo conicas mamillas, ſtrias, ſeu appendices utraque facie planas video, quae ex tota circumferentia obtuſa cuſpide in communem longitudinalem caveam vergant. Hujuſmodi mamillae ex vaſculis tenuiſſimis, molliſſimiſque fiunt, quae criſpata ad invicem per longitudinem cumulantur

lantur in ipſius mamillae fabricam; quando vero per corporis lutei longitudinem membranoſus ductus protenditur, ille, inquam, expanſionibus ſuis lateralibus mamillas eas firmat, & devincit, ut fila ea, quae a tunica teſtium albuginea, eorum compagem pervadunt, & faſciculos vaſorum ſeminariorum ſuſtinent, & uniunt; microſcopio examinata tenuiſſima longitudinalia harumce mamillarum fragmenta eamdem, ac ea, quae teſtium ſunt, fabricam quodammodo exhibent, criſpata nempe ſunt, cava, turgentia, & liquido farcta: injiciens per arteriam ſpermaticam tenuiſſimam gummi ſolutionem in alcohol, ſeu vernicem, hujuſmodi mamillas pervadiſſe non ſemel, etſi multa cum difficultate vidimus, atque vaſculorum, quae ſanguineorum propagines eſſent, elegantiſſimae myriades obſervabantur; hinc ex iis ipſis ſpermaticis vaſculis corpus luteum educi ſuſpicabar, quamquam, ſi ingenue fatear, uſque in ipſa lutea vaſcula injectionis materiam nunquam penetraſſe viderim.

Nonnulli Anatomici in nuper foecundatis phlogoſi correpta obſervaverunt ovaria, eorumque veſiculas. Quid ſi jam pridem factum fuerit? Non equidem per eam temporis brevitatem excitari adeo facile credimus, tum propterea quod ipſe uterus non leviter immutetur. In junioribus ovaria intus intertexta videntur confertiſſimis vaſculorum, ita dicam, manipulis, quae in puellis, quibus mammae ſororiari, & caetera pubertatis ſigna ſoboleſcere incipiunt admodum rubent, & veluti floreſcunt; nonnullae ipſorum tenuiſſimae propagines circa veſiculas producuntur; verum e profundo ovarii villi nonnulli lutei germinare videntur, qui graminis adinſtar, ut Malpighiana phraſi loquar, veſiculis iis circumducuntur, nec quidpiam referunt, quod cum luteo corpore comparari poſſit, hinc vero mira celeritate in papillas, ſeu penicillos luteorum vaſculorum cumulantur, quae veluti papulam effingunt, atque illinc veſicula minus apparet, floſculos diceres floreſcentes, glomerantur, cumulan-

lanturque ſenſim magis, magiſque, atque ſoliditate non mi-nus, quam amplitudine creſcunt.

Vidimus interdum ab aliquo corpore luteo, alteram veluti appendicem, ſeu apophyſim pullulare; non erat alterius corporis nimium producta papilla, ut primum ſuſpicatus eram, at quidem connatum corpus ejuſdem ſtructurae, hinc mecum ipſe meditabar ex iis, quae primum ſpectaveram, & ex aliis an veſiculae in hanc maſſam evaderent, extus, aut intus ſuccreſcente luteo tomento, aut recens ſine his germinaret. Plenitudo ipſorum, defectus reſidui folliculi, me in hanc potius trahebant ſententiam, tum praeſente pleno, perfectoque corpore luteo, alia eorumdem rudimenta vidiſſe viſus ſum, quae non ita circum veſiculam, veluti penicilli pulpoſi imagine germinarent, nec alium germinationis modum referrent, ac flos, aut gemma in plantis. *Ante conceptionem*, inquit Cl. Hallerus *plerumque naſcitur, ſenſim circa veſiculam aliquam ovarii coagulum flavum, ſaepe a me viſum, quod valde auctum, circum natum membranae veſiculae, abire videtur in hemiſphericum, acinoſum, luteum corpus intus cavum, & in ea cavitate, quantum videtur, continens ovulum, ſive membranulam minimam cavam, ſedem futuri hominis*. Prim. Lin. Phyſiol. edit. 2. pag. 545. §. DCCCXXV. Eae Halleri obſervationes noſtras non ſolum comprobant, imo etiam antecesserunt, neque eas renovare auſus eſſem, niſi idem Clariſſimus Auctor in eodem paragrapho, imo in eadem linea adjunxiſſet, *quod ea corpora in foemina poſt conceptum primum adparent*, quam ſententiam iterum, atque praeciſe tranſcripſit ad finem §. DCCCLVII., quae tamen poſtrema verba deficiebant in eodem paragrapho primae editionis.

Corpora igitur glanduloſa non ſemper eamdem plenitudinem aſſequuntur, incrementi vero rationem quamdam tenent; duo aeque perfecta in eodem ovario, aut unum in utroque nunquam inveniſſe diximus. Incidimus foeminae

cada-

cadaver, quae gemellos enixa erat, ſolitarium globoſum, terminatum comperiebamus. Hae mollem ſuam aſſequuta turgent, & duriuſcula ſunt, altera molliora flacidiora; illa intenſe crocea, vel etiam rubent, atque in his vaſculorum ordo nitidior apparet, vaſculorum, ſeu inteſtinulorum inquam, quae corporis lutei compagem faciunt, altera ſublutea, pallida ſubcinerea, pulpam, cujus ſtructuram non tam facile diſtinguimus, perhibent. Caeterum per geſtationis tempora magis, vel minus celeriter decreſcunt, donec in exiguiſſimam molem evadant, ceu in granula, vel maculas minimas, quae quidem & in provectis mulieribus, quae jam a multis annis utero nihil geſtarunt, intenſe luteae, quandoque apparent; papulae, quas ſuperius memoravimus, praecipue occurrebant, quando praeſentis geſtationis decreſceret, vel praeterita geſtatione longe magis decreviſſet. Veniamus jam vero ad uterum.

Ipſe quoque uterus ad concoeptionem praeparatur: ex veteribus Anatomicis Carolus Stephanus uteri vaſa ſanguinea deſcribens, haec eadem in papillas, quae Hipocrates *acetabula* nominabat, elongari ſcripſerat, eaque percipi poſſe, *non ſolum in praegnantibus, ſed etiam in iis, quarum uterus ad ſuſcipiendum ſemen aptus eſt*; confirmaverat Harveus, quam rem non modo neglexerunt Anatomici, imo etiam deſpexerunt. Ego vero jam ab anno MDCCXLVIII. cornua uteri vaccini, tuberculis hic, illic turgentia quandoque videram, quod idem cum ſaepius, iterumque vidiſſem, multa enim mihi ipſorum erat copia, non adeo facile morbi genus, quae mihi primum ſuſpicio obvenerat, eſſe credebam, nam neque durities, neque ſordes, aut ulcera morbi ſuſpicionem dabant; cogitavi poſtea, an acetabula eſſent, quae per puerperium decreſcerent, nam compreſſa humorem tenuem quidem, atque dilutum, at vero quodammodo lacteum interdum dabant.

Nactus

Digitized by Google

Nactus ergo multam copiam uterorum pecudum, atque vaccarum, quae marem quidem erant paſſae, at nunquam evaſerant foecundae, ſubductae porro jam fuerant a mare ab hebdomada, vel etiam menſe; in iiſdem ea quoque tubercula obſervare contigit, quorum nonnullis, quae majora eſſent, delectis poſt macerationem aliquot dierum in aqua, ejuſdem eſſe ſtructurae, ac corpora glanduloſa utero gerentium comperi, idem obſervavi in cuniculis, quas ipſe domi ſervaveram: papulas primum ſpongioſas, quando minima ſunt, referre videntur, quae quidem papulae novam excitatam fabricam demonſtrant, ſi cum reliqua uteri interna ſuperficie comparentur, rubent, atque in aqua diu maceratae, tubercula videntur ſpongioſa elegantiſſimo reticulo tecta, e cujus areolis villi quidam, ſeu villoſa lanugo emergit; reticulum illud cum interna uteri membrana continuari conſpicimus; villi e profundo emergunt, neque eadem ſtructura continuatur in reliquis uteri areis (de quadrupedibus loquimur), e quibus nulla eminent acetabula. Hujuſmodi reticulum in acetabulis pecudum, quae adinſtar calicis ſunt excavata, non ad oram, ſed non nihil profunde obſervatur, in vaccis vero in foraminulis ſpongioſae ſubſtantiae intromittitur, atque niſi diſtrahendo, rumpendoque adeſſe noſcimus.

Beſtiae quadrupedes, quae menſtrua non patiuntur, ſi libidine aeſtuent, ſanguinem e vagina extillant, atque catula aeſtu libidinoſo furens, neque dum a mare compreſſa ſanguinem ſat copioſum emittebat; itemque in ejus utero per varia cornuum loca ſeptem diſtinctiſſima, variaeque amplitudinis corpuſcula inde repereram, quae acetabulorum rudimenta viderentur, mollia erant, ſpongioſa, rubella, e quibus tamen ſerum potius lacteſcens preſſione exprimebatur; vaſa ad ea corrivabant ſanguine turgida, in iiſque confundebantur.

Digitized by Google

In mulieribus, priuſquam concoeperint, nihil profecto hujuſmodi obſervaviſſe ingenuus fateor; Clariſs. Morgagnius ſinus demonſtravit, e quibus ſanguis menſtruus extillaret; eos ampliores utpote ſanguine turgidos, inſtantibus catameniis, ſemper comperimus, atque compreſſo utero potius per oblongos hiatus, quam per vaſculorum foramina ſanguinem exſtillare obſervavimus; rubet, turget uterus ob aeſtum venereum, nihil ultra immutatum ante conceptum revera vidimus. Porro tamen propria vi mutari ex eo deducimus, quod cum non ſemel mulieres aperiremus, quae primis graviditatis hebdomadibus obierant, etſi ovum utero nullibi adhuc dum adhaereret, nihilo tamen minus, alicubi magis turgere uterum, & ſinus magis patulos, longius productis tumidis labris, obſervabamus, ceu veluti deſignatum locum, ubi placenta tandem inſigi, & adhaerere deberet. Idem obſervavimus in utero vacuo cum conceptus eſſet in tuba ſiniſtra, ut, inquam, propria vi immutari uterum dicamus, ceu non ex ſolo placentae contactu. Erat in eo loco puſillus foetus, turgebat tuba craſſis parietibus, atque vaſis ſumme turgidis circumdabatur; uterus porro triplo erat naturali major, rubellus, turgidus, atque ad eum locum, ubi tuba illius lateris inſinuabatur, per tres digitos tranſverſos magis erat tumidus, atque in ſuperficie interna ſinus ſatis patulos habebat productis labellis craſſis, atque non nihil tumidis. Longe tumidae erant arteriae ſpermaticae, atque inſtituta injectione, ceram plenis rivulis in uteri tumidi ſinus penetraſſe obſervavimus, quum eae arteriae, quando mulieres nihil in utero habent, ad eum tota naturali diametro perveniant, anguſtentur inde, ut tenuiſſimae in uteri ſubſtantia intercipiantur. Quid porro? foeminae nonniſi poſt purgationem concipiunt, atque ſi ceſſet, non amplius foecundae evadunt; mulieres ultra quinquageſimum annum menſtruantes pepererunt, praecoces hujuſmodi purgationes in puellis praecoces reddunt foecundationes.

Har-

Digitized by Google

Harveus mucoſa filamenta deſcribit, quae ab ultimo, ſeu ſuperiore cornuum angulo ducta, ſimulque inde juncta, membranoſam, ac mucilaginoſam tunicam, ſeu, ut ajunt, manticam, vacuam vero, ceu nullo occupatam embryone efficerent. Equidem embryonis membranas tamquam ex muco compaginari ampliſſimis Anatomicorum obſervationibus ediximus. Semel in ſcropha, in qua luculenta occurrebant uteri acetabula, mucoſam, ſanguinolentam telam obſervaveram, per totam uteri amplitudinem perfuſam, nec ullam minimam compactam ſubſtantiam, quae pro embryone, vel minimo ſumi poſſet, occludentem; in aqua neque ſolvebatur, & adinſtar membranae natabat, & expandebatur facillime citra rupturam, craſſam, mucoſam, ſpongioſamque telam dixiſſes, quae paſſim rubebat papulis, ſeu maculis ſanguineis. Etſi per quam attentum in hujus uteri anatome me praeſtiterim, non potius Harvei obſervationem confirmare intendo, quam Anatomicorum diligentiam excitare, ut in iiſdem inſiſtant; Harveus enim tanta obſervandi opportunitate, atque diligentia obſervationes ſuas adauxit, ut hae negligi quidem non debeant; atque ut ipſe fatear quod recogito, poſtremae, quas in ovibus, & vaccis inſtitui obſervationes, a communi ſententia me non leviter deturbarunt, ut generationem multiplici partium apparatu promoveri, foveri, & perfici crediderim; dubium obſervationes excitarant; eaedem aliquando fortaſſe abſolvent, ſi porro operis modos ſequamur.

Equidem placenta, quam partem organicam tandem conſpicimus veluti ex muco fit. Primis geſtationis temporibus ab utero delapſum ovum mucoſa ſubſtantia ſanguinolenta circumquaque obvolutum videtur: hujuſmodi placentam Ruyſchius ſanguinem praeter naturam concretum exiſtimaverat; at vero ſi aqua diſſolvatur, fibroſam permixtam texturam obſervamus; quam Clariſs. Albinus nitide reſolvit; quo magis placentae organica ſtructura adoleſcit, eo

P ſoli-

Digitized by Google

ſolidior videtur, mucoſa, villoſa fit ſubſtantia, elegantiſſimum muſcum refert, vaſcula fiunt ſenſim majora, ſolidiora, e quibus funiculus tandem umbilicalis educitur. Perpendite quemadmodum habitis proportionibus adaucta placentae ſoliditate, amplitudo decreſcat, pulpoſam tamen ſemper retinet mollitiem, vel ſolubilem ſaltem, atque ſpongioſam, reliqua membranarum pars, ſuper quam non adcrevit placenta, mollis celluloſa, mucoſa, glutinoſa inquam ſupereſt ex ea facie. Modo huic, modo illi ovi plagae (deſuper ipſum uteri orificium offendimus) in mulieribus adhaeret, dum tamen foetus in membranis eumdem ſemper ſitum tenet, ne dicamus ex ovi inclinatione fieri; funiculus umbilicalis non ſemper ab eadem placentae plaga prodit, quod iſta vegetationis inquam modum non ſemper eumdem tenet, aptatur autem aptae uteri plagae, etenim in beſtiis, quae diſcreta habent, & uteri cornubus propria acetabula, cotyledones omnino reſpondentes numero habent, ſitu, atque figura; exceſſum, aut defectum ullum numquam obſervaſſe contigit; longe tamen diverſa eſt cotyledonum, & acetabulorum ſtructura, quemadmodum & partium, quibus adnaſcuntur, ut cauſſa, quae alteros efficit, non eodem pacto altera componat, etſi ſucceſſive fiant; eſt tamen utrorumque ſtructura elegantiſſima, adeoque inquam diverſa, ut per contactum fieri, nequidem ſuſpicari poſſimus, itidemque longe variant inter ſe, ex variis animantium ſpeciebus, & in eiſdem animantibus harum partium numerus, & figura multum variat, etſi ſemper ſibi ad invicem reſpondeant; placenta inquam ipſa humana non per totam ſuperficiem ſuam aeque adoleſcit, per cumulos diſtinctos pleniores, ampliores, vividioreſque compaginatur, & in cotyledones aeque reſolvitur.

Digitized by Google

SUITE DES RECHERCHES

Sur le fluide Elaſtique de la Poudre à Canon.

PAR LE CHEVALIER SALUCE.

1. Je crois d'avoir aſsés prouvé dans le Mémoire précédent que le fluide élaſtique qui ſe développe de la poudre à Canon eſt de même nature que l'air commun, & que la force prodigieuſe de ce fluide dépend de l'action du feu dans toutes ſes parties qui lui fait recouvrer ſa force élaſtique. Comme cependant cette matiére eſt une de plus intéreſſantes dans la Phyſique, je tacherai de perfectioner de plus en plus le travail que j'avais entrepris, en y ajoutant des nouvelles lumiéres qui ſerviront non ſeulement à confirmer la Théorie que j'ai établi, mais encore à lui donner une plus grande étendue.

Je vais donc expoſer les principaux réſultats de mes recherches. Les expériences ſur l'élaſticité, & ſur la compreſſion du fluide, que je n'avais qu'imparfaitement tenté comme je l'ai dit (*a*) & que j'ai taché de répéter ſoigneuſement, ſerviront avec l'annaliſe de quelqu'autres faits à mettre hors de doute ce que j'ai déja avancé; je paſſerai enſuite à faire voir que la force du fluide dépend principalement de la viteſſe avec laquelle il ſe développe: les expériences qui ſuivent rempliſſent la prémiere de ces vues.

2. Je formai le tube de comunication entre le flacon ou je mettais la poudre, & le récipient, de cinq cilindres de verre aſſés longs; celui qui tenait au flacon l'était même d'avantage, afin que le fluide pû ſe dilater dans un

P 2 plus

(*a*) Voiés la notte * du mém. pag. 6.

plus grand eſpace ſans trouver le moindre obſtacle (*b*); je les garnis chacun d'un double filtre de gaze bien ſerrée, & j'en enduiſis les quattre prémiers de bonne huile de tartre: je paſſai dans les tubes auſſi du coton trempé dans la même huile, & je mis du ſel de tartre pilé groſſiérement ſur le filtre de la piéce qui entrait dans le récipient; le baromètre recourbé finiſſait en forme d'entonnoir vers la partie qui comuniquait avec l'air extérieur, & l'autre extrémité entrait dans un petit cilindre qui tenait à un robinet, lequel paſſait dans le récipient en traverſant la plattine de la machine pnéumatique. Toutes les jonctions furent ſoigneuſement maſtiquées, & j'opérai enſuite de la même maniére que dans l'expérience (3. du mém.): le mercure était preſque à la hauteur de 27 pouces lorſque la poudre prit feu, en ſorte qu'il ne ſerait reſté dans ces cavités qu' $\frac{1}{2}$ pouce d'air environ, il baiſſa au prémier inſtant de dix à douze pouces, & après quelques oſcillations qui diminuaient par dégrés le mercure commença à monter, & ne diſcontinua qu'après quelque tems; s'étant arrêté à un, ou à deux pouces plus bas qu'il n'était au moment que la poudre s'enflamma; je reconnus alors que le fluide avait aquis la température de l'air ambient, & je notai le point d'élévation à l'accoûtumée.

3. Je plaçai enſuite ce baromètre d'épreuve à côté d'un autre exactement conſtruit ſuivant la métode donnée (com. pag. 16.) afin de pouvoir comparer les changemens, & eſtimer la cauſe des altérations qui pouvaient ſurvenir; je le gardai ainſi durant ving-trois jours ſans qu'il m'ait été poſſible de découvrir que ce baromètre eut ſouffert d'autres change-

(*b*) Il m'eſt toujours arrivé de voir briſer mes vaiſſeaux lorſque le tube étant trop court, le filtre ſe trouvait prés du flacon, ou lorſque étant dans l'obligation de plier le tube, la courbure n'était pas aſſés eloignée du flacon. Mr. Halles dans ſon Appendice à la ſtat. des végét. nous apprend qu'il prit auſſi cette précaution. pag. 341.

changemens que ceux qui dépandaient des variations de l'atmoſphére: je crus enfin inutile de le garder plus long tems puiſque je n'avais pas la moindre indication d'abſorbtion, d'autant plus que Mr. Hauksbee nous apprend, comme je l'ai déja dit, que les $\frac{19}{20}$ dont il fait mention fûrent abſorbés dans 18 jours ſans avoir ſubit enſuite aucune variation. Le vingt-quatriéme jour pour déterminer les lois de la compreſſibilité de ce fluide j'ai verſé à plusieurs repriſes dans la jambe ouverte différentes quantités de vif argent, & ayant obſervé les diminutions de l'eſpace je trouvai que le degré de compreſſion était préciſément en raiſon des poids ajoutés (*c*).

4. La concluſion que j'ai tiré de mes expériences eſt ſans contredit très-ſimple, & naturelle; & on doit acquieſcer d'autant plus volontiers que tous les réſultats concourent à la démontrer. Je ſuis pourtant d'avis que quoique l'air ſoit le grand agent qui produit les effets de la poudre, il exerce cependant dans cette rencontre au prémier inſtant une force plus expanſive que s'il était parfaitement ſec: car l'on ſait qu'un air humide peut ſe dilater d'avantage, & qu'il ſe trouve en effet de l'humidité dans le ſalpêtre, ainſi que dans tous le ſels criſtalliſés: il eſt pourtant clair, par ce que nous avons vû, que l'humidité n'a pas grande part dans les effets de la poudre, & ceci ſera encore plus clairement prouvé dans la ſuite. Au reſte, quelque ſoit l'effet que peut produire l'humidité qui ſe développe d'une poudre donnée on ne ſaurait la déterminer préciſément ſans en connaitre exactement la quantité: on pourrait peut-être l'obtenir en brûlant cette poudre dans un flacon, qui fut ma-

(*c*) Je crois de devoir avertir ici que les colonnes de mercure que j'ai ajouté dans le tube ſuſdit ſe trouvaient contenues dans l'eſpace cilindrique, de ſorte que l'entonnoir que j'avais appliqué pour avoir une quantité ſuffiſante de mercure, lorſque je faiſais le vuide dans la jambe oppoſée, ne me ſervait en cette occaſion que pour me faciliter les opérations.

Digitized by Google

maſtiqué à une file de balons; on aurait alors cette quantité en entier par ſa condenſation. Je ne crois pas d'ailleurs qu'il y eut une méthode plus ſûre pour dénoüer cette queſtion; car outre qu'il eſt fort difficile de ſavoir parfaitement combien chaque compoſant contient d'eau, quand même on en ſerait aſſûré, il ſerait encore queſtion de déterminer combien en retiennent les ſels neutres, que l'on trouve après l'inflammation; ce n'eſt pas un point à negliger, puiſqu'on ſait que les ſels qui ſe criſtalliſent en contiennent une quantité conſidérable; l'umidité donc qui ſe trouve dans les compoſans, ou dans la poudre même étant connue, on ne ſerait nullement illuminé ſur l'accraiſſement de la force expanſive qu'elle apporte à l'air.

5. Du reſte ſi l'eau que contient la poudre ſe développait en vapeurs dans le tems de l'inflammation, il eſt viſible que non ſeulement elle produirait toute ſeule les effets de la poudre, mais encore des bien plus grands, puiſque Mr. Muſchembroek a trouvé que l'eau qui ſe reſout en vapeurs a alors pour le moins une force onze fois plus grande qu'une égale quantité de (*d*) poudre; une onziéme donc, c'eſt à dire une quantité bien petite de l'eau qui ſe trouve en effet dans la poudre, ſuffirait pour produire tous ſes effets, de façon que l'air n'y entrerait plus pour rien, ce qui eſt abſolument contraire à ce que j'ai fait voir & qui ſe trouve encore confirmé par l'autorité de pluſieurs Auteurs du prémier ordre.

6. Un Phyſicien renommé de notre tems prétend que l'air n'eſt pas ſuffiſant à produire tous les effets de la poudre je rapporterai ici ſes propres termes. *La (e) plûpart des Phyſiciens qui ont parlé de l'exploſion de la poudre ont attribué ce merveilleux effet uniquement à l'air qui s'y trouve comme incorporé par l'action des pilons, & à celui*

(*d*) Eſſai de phyſ. §. 873.
(*e*) Leçons de phyſ. expérim.

celui qui remplit les petits eſpaces, que les grains raſſemblés comprennent entr' eux . . . . Ces raiſonnemens doivent ſans doute entrer dans l' explication des effets de la poudre enflammée, & je n' ai garde de les conteſter : mais je ne les crois pas ſuffiſans, & je penſe qu' il faut y en ajouter quelqu' autre &c. Je tenterai de développer les raiſons qu' il apporte en les comparant aux autorités ſur leſquelles il les appuye. Quant aux vapeurs qu' il aſſocie à l' air auxquelles il attribue la vertu d' avoir contribué à faire baiſſer l' eau dans le tube de Mr. Bernoulli comme on peut le voir par ſes propres expreſſions. *N' eſt-on pas tenté de croire, que dans le tuyau de Mr. Bernoulli il reſte après l' inflammation quelque vapeur qui augmente un peu le volume de l' air avec lequel il ſe mêle, & qui fait baiſſer la ſurface de l' eau* ? quelles qu' elles ſoient, il ſuffit d' obſerver que ce grand Géométre n' ayant déterminé cet abbaiſſement que quatre heures après le refroidiſſement du fluide (*f*) on ne peut plus emprunter le ſecours d' aucune eſpéce de vapeur pour rendre raiſon du fait ; car il ne nous eſt pas encore donné de en connaître d' aucune ſorte qui n' aquiére dans

(*f*) Mr. Bernoulli nous aprend qu' ayant mis le feu dans un tube au moyen d' un miroir ardent, à quattre grains de poudre, l' air qui s'en développa chaſſa l' eau hors du tuyau, après quoi elle remonta juſqu' à ce que le fluide eut acquis la température de l' air ambient, & s' arrêta enſuite trois ou quattre heures après; il meſura alors l'eſpace occupé par le fluide, & il le trouva capable de contenir 200 de ces grains, ce fait, & quelque réflexions qu' il y ajoute, lui font déterminer l' air contenu dans la poudre cent fois plus denſe qu' il eſt dans ſon état naturel.

On peut remarquer en prémier lieu qu' il fait ſentir, qu' à l' occaſion de l' exploſion l' eau fut pouſſée avec tant de violence que ſi le tube n' avait pas été bien long, non ſeulement l' eau, mais l' air même en aurait été entiérement chaſſé. *Adeo ut nonnunquam, niſi portio tubi ſit ſatis longa, per orificium, non ſolum omnis aqua, ſed aër expelli poſſit.* On peut noter eu ſecond lieu que Mr. Bernoulli n' a donné que l' eſpace abſolu de quattre heures après que l' eau s'était arrêtée, ou comme il dit, après le réfroidiſſement du fluide, & qu' il ne tient aucun compte de l' abſorbtion des vapeurs ſulfureuſes pendant ce tems. *Proinde res ex voto ſucceſſit ; ideoque machinam immutatam in priorem locum temperatum tranſtulimus.*

dans un auſſi long eſpace de tems ſa condenſation naturelle, lorſque la cauſe qui avait produit ſa dilatation a entiérement ceſſé.

7. Quoique cet Illuſtre Auteur ait cherché par là de donner une explication du réſultat que Mr. Bernoulli rapporte dans ſa diſſertation *De efferveſcentia, & fermentatione*, inſérée dans le pr. Volume de ſes oeuvres à la pag. 55., on voit cependant qu' il a quelque doute ſur cette expérience comme ſes paroles ſemblent l' indiquer. *Je ſais bien* dit-il *que Mr. Bernoulli cité par Varignon ayant mis le feu &c.* (g) . . . . *& je conviens que cette induction s' il n'y a rien à rabattre donne beaucoup de force à l' opinion de ceux qui attribuent à l' air ſeul les grands effets de la poudre. Mais comment accorder cette expérience avec celles de Mr. Halles, d' ou il conclut avec toutes les apparences de vérité, que les matiéres ſulfureuſes que l' on brûle abſorbent l' air*. Il eſt pourtant ſûr que l' eſpace des deuxcent grains n' eſt pas exagéré, & qu' il eſt au contraire fort au deſſous de ce qu' il aurait été ſans l' abſorbtion des vapeurs ſulfureuſes, mais l' on voit aſſés que ce n' eſt qu' en conſéquence de la perſuaſion ou il était par ſa Théorie *a priori*, que *l' air ne ſuffit pas &c.* qu' il a avancé, que *dans le tuyau de Mr. Bernoulli* il reſtait *après l' inflammation quelque vapeur qui* augmentait *le volume de l' air &c.* & qu' il trouve de la difficulté à accorder cette expérience avec celles des Mr. Halles, il me parait cependant qu' elle ne porte pas coup à celles ci, à moins que l' on ne craie que Mr.

ſtulimus, ubi aquam in tubo ſenſim rurſum aſcendere obſervavimus, nimirum ob duplicem cauſam, tum ob translationem ex loco calidiori in frigidorem, tum ob ſubito incenſum ignem iterum extinctum, tamdiu, inquam, aſcendit aqua, donec tota machina refriguiſſet, & priſtinum ſtatum, induiſſet; tum demum amplius non aſcendit, ſed quievit, etiam per tres, vel quatuor horas, quamdiu in iſto ſtatu permittebamus; ſic itaque advertimus, non ad priorem terminum uſque aſcendiſſe, ſed notabiliter infra limitem poſuiſſe . . . . . . , ſed prout judicavimus ducenta granula pulveris pyri vix adimpleviſſent ſpatium.

(g) Voiés la note ci devant.

Mr. Halles n'ait voulu démontrer que les vapeurs ſulfureuſes ont la proprieté de fixer, ou d'abſorber dans ce peu de tems preſque tout l'air d'un tube quelconque, ce qui ne ſerait pas l'intention de ce célebre Anglais (& c'eſt ce dont je n'oſerais ſoupçonner le ſavant Auteur dont je parle). Car dans la Statique des végétaux il fait voir que l'air eſt abſorbé par ces ſortes de vapeurs (*h*): qu'il ne l'eſt que fort lentement, de ſorte qu'elles ont cette vertu pendant pluſieurs jours (*i*): que dans les prémiers tems, elles ont plus d'action que dans la ſuite, comme le remarque Mr. Hauksbée (k): qu'elles ne peuvent enfin abſorber tout l'air contenu dans l'eſpace ou elles ſont renfermées (*l*); il parle enſuite de la grande quantité d'air qui ſort du ſalpêtre, & en conſéquence il ne doute point que le fluide élaſtique

(*h*) Exp. 76. pag. 173.

(*i*) Ibid.

(k) Mr. Hauksbee ayant brûlé de la poudre dont le poid était d'un grain dans un tuiau, où il avait obſervé par l'abaiſſement de l'eau que la quantité du fluide generé occupait au prémier inſtant 222 fois le prémier volume, il remarqua que dans deux heures de là, l'eau était remontée de $\frac{4}{20}$ de l'eſpace abandonné, & que deux heures encore après elle était $\frac{5}{20}$ de plus au deſſus. Hors il eſt évident que cette aſcenſion de l'eau ne peut pas ſeulement dépendre du refroidiſſement du fluide, & de la condenſation des vapeurs aqueuſes comme paraît le ſoupçonner l'Auteur de cette expérience: car comment pourrait-on penſer qu'un peu de ce fluide ſi rare ait pû retarder non ſeulement quelques heures, mais bien des journées avant que d'avoir acquis la température de l'atmoſphere, puiſque l'eau continua à monter pendant dix-huit jours, & qu'il n'y reſta plus qu' $\frac{1}{20}$ après ce tems qui n'ai plus changé? Les expériences de Mr. Halles, & celles que j'ai fait moi même font voir qu'une auſſi longue abſorbtion n'eſt düe qu'aux vapeurs acides & ſulfureuſes, & puiſqu'on peut croire ſans hazarder que dans une heure de tems, l'action de la chaleur, & des vapeurs aqueuſes ait entierement ceſſé, il faut convenir que la diminution du fluide dans ce tems apportée par trois différentes cauſes, c'eſt à dire par la condenſation des vapeurs, par celle de l'air, & enfin par l'abſorbtion n'égalant que $\frac{2}{20}$, ou ſoit $\frac{1}{10}$ du fluide generé, le vapeurs aqueuſes ſur tout n'ayent pas cette grande vertu qu'on leur attribue.

(*l*) Pag. 202.

ſtique de la poudre ne ſoit de l'air commun (*m*): cet air cependant doit être conſidérablement condenſé, puiſque le même Mr. Halles par la diſtillation qu'il a fait du ſalpêtre a trouvé que l'air qui en eſt géneré occupait un volume cent quattre vingt-fois le prémier (*n*).

8. On peut auſſi examiner à cette occaſion le ſentiment d'un Phyſicien qui dans le quatriéme tome de l'Accadémie de Bologne a donné une diſſertation ſur ce ſujet; cet Auteur, dont le travail montre d'ailleurs aſſés d'érudition, entreprend de faire voir par un enchainement d'argumens, qu'il faut avoir recours aux vapeurs aqueuſes pour obtenir l'immenſe raréfaction du fluide, & il prétend que l'air n'eſt pas ſuffiſant, comme on peut le voir par le précis de ſon ſentiment que je vais expoſer. *Mr. Bernoulli* dit-il *nous aprend que l'eſpace abandonné par l'eau aurait pû contenir deux cent des grains qu'il avoit employés, donc en diviſant par 4 qui était le nombre des grains dont il ſe ſervit, l'on aura la denſité de l'air en raiſon de 50 par grain, or en ſuppoſant une chaleur égale à celle de l'huile bouillante, le volume du fluide rarefié, ſera 250 fois plus grand que celui de la poudre; mais Mr. Ammontons, Bélidor, & moi même*, continue-t-il, *nous avons trouvé que la flamme de la poudre ſe dilate dans un eſpace 4 ou 5000 fois plus grand que l'eſpace de la poudre, donc, pour que l'air pût ſe dilater dans un auſſi grand eſpace, il faudrait que le degré de chaleur néceſſaire fût à celui de l'huile bouillante comme 16 : 1 ce qui n'étant pas probable, il faut donc avoir recours à l'eau qui eſt dans le ſalpêtre, & qui ſe convertit en vapeurs en même tems que la poudre s'enflamme.*

9. En prémier lieu je ne ſaurais penſer que la force, ou l'activité de la poudre dépende du volume de la flamme, ni qu'on puiſſe la méſurer par là, étant très-naturel que dans un fluide compoſé de parties inflammables, & de parties

(*m*) Pag. 237.
(*n*) Exp. 72. pag. 159.

Digitized by Google

parties actives, ces dernieres ne ſe dilatent pas dans un volume auſſi grand que la flamme qui émane des autres: en effet il eſt évident que la force du fluide doit être determinée par l'eſpace qu'il occupe dans ſon expanſion, en vertu de laquelle il chaſſe les obſtacles qui ſe préſentent, & non pas par le volume qu' acquiert la flamme dans cet inſtant, puiſqu'il eſt certain que la prémiere dépend entiérement des parties actives du fluide, ſans que l'on puiſſe porter le même jugement par rapport à l'autre.

10. Notre Auteur n'a pas non plus obſervé que dans le tube de Mr. Bernoulli il faut avoir égard à l'air qui eſt abſorbé par les vapeurs ſulfureuſes; or en ſuppoſant même que ce ſoit le refroidiſſement de l'air humide, qui ait ſeul contribué dans la prémiere heure à l'aſcenſion de l'eau dans le tube, & que ces vapeurs ſulfureuſes n'y entrent pour rien, de façon que ſans cela le fluide ne ſe ſerait dilaté que dans $\frac{18}{20}$; l'on ne pourra cependant pas ſe diſpenſer de leur attribuer les changemens arrivés dans les trois heures ſuivantes: or ces changemens, comme je l'ai ci devant obſervé (not. k) montent à 7 autres vingtiémes de l'eſpace réſidu, de ſorte que dans le tube il ne pouvait plus reſter alors que $\frac{11}{20}$ de l'air generé (ibid.), & comme cet air qui reſtait, était égal à cinquante fois le volume de la poudre, donc trois heures auparavant le volume du fluide generé devait être pour le moins 81 fois plus grand que le volume de la poudre.

11. Ce réſultat cependant ne ſaurait convenir avec celui que Mr. Hauksbee nous donne, quand même nous tiendrions encore compte de la prémiere heure, car nous n'aurions qu'un volume 90 fois plus grand, tandis que le ſuſdit Auteur le trouve de 222, mais on voit aſſés que Mr. Bernoulli n'a pas prétendu donner une meſure exacte

été du fluide, mais ſeulement une ingénieuſe maniére de le déterminer; car par ce que nous avons vu ci-devant (not. *f*) il a crû que l' aſcenſion de l' eau avait été cauſée par le tranſport de la machine d' un endroit à un autre qui était moins chaud, & par la prompte extinction du feu; c' eſt pourquoi il fait obſerver que l' eau ne ceſſa de monter que lorſque le fluide eut acquis la temperature de l' atmoſphere ſans pourtant nous faire ſavoir le tems que ce fluide employe à ſe refroidir, il nous dit ſeulement avoir obſervé la hauteur de l' eau trois ou quatre heures après qu' elle fut tranquille; mais c' eſt là une détermination bien vague, parceque l' on ſait que l'eau dans l' expérience de Mr. Hauksbee continua encore à monter pendant 18 jours compris le tems de ſon refroidiſſement: & cela eu égard a l' abſorbtion de l' air cauſée par les vapeurs ſulfureuſes, de ſorte que l' on ne peut pas ſavoir le tems qui s' écoula depuis l' inflammation juſqu' à celui où Mr. Bernoulli fit ſon obſervation, ni par conſéquent faire entrer en compte l' abſorbtion qui ſe fit dans ce tems là.

12. Pour en revenir à l' Auteur ci devant cité (8): il détermine la denſité abſolue de l' air dans chaque grain de poudre par rapport à celle de l' air commun comme 50 : 1. parceque l' expanſion du fluide dans le tube de Mr. Bernoulli était au tems de l' obſervation dans la même raiſon à l' égard du volume de la poudre; outre les reflexions que j' ai fait, par leſquelles on peut facilement appercevoir l' inconſéquence de ce raiſonnement, il faudrait ſuppoſer encore que tout le volume de la poudre conſiſta dans un égal volume d' air pur condenſé, qui cependant comme nous l' apprend Mr. Halles n' y entre que pour la huitiéme partie, le reſte étant de parties inflammables, & groſſiéres. (*o*):

de

(*o*) Mr. Halles à la vérité ne dit cela qu' en parlant du ſalpêtre, exp. 72. pag. 159. mais comme l' air de la poudre n' eſt produit que par la décompoſition de cette ſubſtance, & que les deux autres n' en fourniſſent point, ou du

moins

Digitized by Google

de plus l'on doit prendre en conſidération les intervalles qui ſont entre les grains, & dont la ſomme en rend le volume abſolu moindre d'un tiers.

13. Enſuite de toutes ces raiſons, & de celles (11) qui me font préférer l'expérience de Mr. Hauksbee, ne s'agiſſant point d'ailleurs d'introduire ipotéthiquement l'action d'une chaleur ſujete juſqu'a préſent a pluſieurs déterminations arbitraires, je remarque en prémier lieu que l'air generé à l'occaſion de l'inflammation occupait un eſpace 222 fois plus grand que le volume de la poudre; or en retranchant la $\frac{1}{10}$ de l'eſpace qui avait été remplacé par l'eau dans la prémiere heure, pour être aſſurés que la chaleur de l'air n'y a plus aucune part, nous aurons le volume du fluide reduit à la température de l'air ambient environ 200 fois plus grand que celui de la poudre: en ſecond lieu comme ce volume eſt moindre d'un tiers (12), celui du fluide ſera par conſéquent au moins 266 fois plus grand, & puiſque l'air ne faiſait que une huitiéme partie de la poudre (12) donc le volume du fluide était pour le moins 2128 fois plus grand que celui qu'il occupait dans la poudre avant l'inflammation, d'où il en vient enfin que l'air dans chaque grain, ou pour mieux dire dans la poudre employée, avait cette denſité; ce qui eſt fort éloigné de ce que prétend l'Auteur dont j'ai rapporté le ſentiment (8).

14. D'après tout ce que je viens de dire on peut voir clairement que les Théories purement ſpeculatives, & établies

a priori

---

moins ſi peu qu'on ne s'en apperçoit pas aſſés ſenſiblement, j'ai crû de pouvoir me ſervir de cette lumiére par rapport à la poudre, & cela d'autant plus que le ſalpêtre ne faiſant que les $\frac{7}{9}$ de la meilleure poudre on n'aurait à ce prix que la $\frac{1}{8}$ des $\frac{7}{9}$ &c.

Digitized by Google

a priori ſur de principes éloignés ſans le ſecours d'un enchainement d'expériences qui en appuyent le ſiſtême, ſont fort ſuiettes à caution, & c'eſt là un avvertiſſement que nous donnent les Phyſiciens du prémier ordre, & que j'ai táché de ſuivre autant qu'il m'à été poſſible: *en fait de Phyſique*, dit Mr. de Buffon, *on doit rechercher autant les expériences, que l'on doit craindre les ſiſtêmes, & la connoiſſance des effets*, dit-il, *nous conduira inſenſiblement à celle des cauſes, & l'on ne tombera plus dans les abſurdités, qui ſemblent les caractériſer*: il eſt vrai qu'il n'en faut pas non plus abuſer, & pour cela il avertit que l'on doit *en amaſſer juſqu'à ce que nous ſoyons inſtruits*.

15. Mr. Daniel Bernoulli apporte encore une difficulté qui eſt ſans doute plus réelle, & qui parait même inſurmontable au prémier aſpect. Voici en quoi elle conſiſte.

Ce ſavant Géomètre ayant calculé par les gravités ſpécifiques connues, de l'air, & de la poudre, la quantité d'air qui pouvait y être contenu, a trouvé que quand même on voudrait la ſuppoſer toute d'air, l'elaſticité de celui-ci ne ſerait jamais capable de produire la force que nous y obſervons. D'où il conclud qu'il faut, ou admettre dans la poudre un autre principe plus actif, que l'air, ou bien ſuppoſer que ſa force élaſtique augmente en ce cas dans une raiſon plus grande que celle des condenſations.

16. L'on pourrait à la vérité éluder entiérement cette difficulté en accordant à Mr. Bernoulli cette derniére hypotéſe; l'expérience nous apprend en effet que lorſque la denſité de l'air eſt ſeulement quadruple de la naturelle, la condenſation augmente en moindre raiſon que les poids comprimans; d'où l'on a tout lieu de croire, que cette raiſon ira toujours en diminuant de plus en plus dans les plus grandes condenſations. Mais quoique l'on ne doive pas exclure abſolument cette raiſon, on peut cependant y en ajouter un autre qui n'eſt pas moins digne de conſidéra-

tion

tion c'eſt-à dire, que puiſque l'air contenu dans la poudre eſt mêlé avec des ſubſtances hétérogênes, il pourrait bien avoir une gravité ſpécifique plus grande que celles-ci, & par conſéquent que la poudre même, & dans ce cas l'excès de condenſation pourrait en quelque façon compenſer la moindre quantité qu'il y en a, en effet nous avons trouvé *a poſteriori* que l'air de la poudre eſt aumoins 2128 fois plus denſe que l'air naturel, & au contraire ſelon le calcul de Mr. Bernoulli il ne pouvait avoir tout au plus, qu'une denſité mille fois plus grande.

17. De la réfléxion propoſée il parait que l'on peut déduire la véritable raiſon de cette différence; Mr. Bernoulli a déterminé la denſité de l'air de la poudre 1000 fois plus grande que la naturelle, enſuite de ce qu'il a poſé la gravité ſpécifique de la poudre égale à celle de l'eau; nous verrons dans la ſuite que l'air de la poudre n'eſt pas contenu indiſtinctément dans chacun de ſes compoſans, mais qu'il ſe trouve dans le ſalpêtre; or la gravité ſpécifique de ce ſel eſt plus-que double de celle de l'eau, & par conſéquent la détermination de celle de la poudre aſſignée par cet Illuſtre Mathématicien eſt moindre de plus de la moitié de ce qu'elle eſt en effet; il n'eſt pas extraordinaire par conſéquent que l'air ſoit beaucoup plus condenſé qu'il ne l'a ſuppoſé: La plus grande denſité enfin de l'air dans la poudre, & la plus grande raiſon ſelon laquelle cet air ſi fort condenſé augmente ſon élaſticité, peuvent fournir une ſolution de la difficulté propoſée par ce Savant.

18. Je ne ſaurais convenir non plus avec l'Auteur Italien ſur ce qu'il avance dans ce même mémoire que dans les opérations de la poudre, on condenſe de l'air ſans s'en appercevoir, car ſelon cette opinion il s'enſuivrait que les ſubſtances étant ſeulement broyées enſemble ne devraient point produire autant de fluide que ſi on en grainait une égale

quan-

Digitized by Google

quantité, cependant ſoit que les matiéres ne ſoient que broyées, ou qu' étant grainées on les pile, & on les preſſe finement, la quantité du fluide ne change pas du moins aſsès ſenſiblement pour s' en apperçevoir: l' air enfin à mon avis ſe trouve dans les parties intimes. Quant à ce que ces deux Savans (6. 8.) nous diſent par rapport à l'inflammation de la poudre dans le vuide, je ne crois pas d' être obligé d' en parler plus au long ici, après ce qu' en ont dit de grands Hommes, & ce que j' ai expoſé moi même dans le mémoire précédent.

19. Il eſt inutile de pouſſer plus loin ces petites diſcuſſions, je paſſerai maintenant à éxaminer les proprietés, & les fonctions particulières de chacun des compoſans de la poudre; mais comme l' on ne ſaurait parvenir, le plus ſouvent à découvrir la raiſon, & le rapport des phénomênes, ſans combiner les effets produits par des principes qui aient entr' eux quelque analogie, j' ai crû devoir en comparer quelques uns ſelon les combinaiſons qui m' ont paru les plus propres à cet effet.

20. Le ſalpêtre eſt un ſel moyen, qui a entr' autres propriétés celle de ſe décompoſer par l' attouchement du phlogiſtique auquel l' acide qui s' en ſépare, s' unit intimément, ainſi qu' il eſt univerſellement reconnu en Chimie; & je ferai voir dans la ſuite que c' eſt en conſéquence de cette manoeuvre que ſe produiſent les effets de la poudre. Mrs. Boyle, Halles, Muſchembroek, & pluſieurs autres Phyſiciens ont réconnu qu' il ſe développe un fluide élaſtique du ſalpêtre, lorſqu' il ſe décompoſe, ils ont même taché d' en déterminer la quantité, & preſque tous le tiennent pour de l' air naturel; Mr. Halles entr' autres n' en doute pas, (*p*) Mr. Boyle pour s' aſſûrer ſi l' air était néceſſaire pour la criſtalliſation de ce ſel éſſaya de combiner de l' eſprit de nitre avec du ſel de tartre dans une phiole vuide

(*p*) Stat. des végét.

vuide d'air (q), & n'ayant point vû ce mélange tomber en criſtaux après un certain tems, il conclut de là très-judicieuſement que l'air y était néceſſaire.

21. On obſerve à l'occaſion de l'effervescence qui ſe fait par le mêlange de ces deux ſubſtances, en le pratiquant dans une vaſe fermé que le baromêtre deſcend après quoi il remonte, & ſe rend toujours à niveau, d'où l'on peut conclure que dans les prémiers tems il ſe développe beaucoup d'air, & qu'il ſe réabſorbe enſuite; de façon que l'on pourrait démander ſi ce n'eſt point les parties des matiéres qui étant dans un violent mouvement pour s'unir réciproquement, excitent une chaleur qui communique à l'air la vertu de ſe dégager de dedans ces mêmes matiéres, & ſi ce n'eſt point dans le tems que commence l'évaporation qu'il s'introduit de nouveau? il eſt vrai qu'on pourrait douter que la chaleur qui eſt produit par le mélange des matiéres cauſe la deſcente du mercure, par la dilatation qu'elle procure à l'air, laquelle ceſſant l'oblige de remonter.

22. Ce ſont deux points trop délicats pour chercher de les décider ſans le ſecours d'une longue ſuite d'expériences guidées par les raiſonnemens les plus éclairés, je me contenterai en attendant de ſuivre l'opinion commune des Phyſiciens, & d'en apporter quelque raiſon plauſible me réſervant de traiter ces matiéres plus amplement une autre fois, d'autant plus que je me flatte d'avoir le plaiſir de lire ce que l'Auteur dont j'ai expoſé le ſentiment (8) promet de donner, & de profiter de ſes découvertes pour mieux reüſſir dans mon entrepriſe.

23. La deſcente du mercure dans l'eau eſt très-rapide, la derniére même à cauſe de ſa moindre gravité ſpécifique en eſt chaſſé du Siphon par repriſes, après les prémiers moments il ſe fait des oſcillations, & enfin le liquide ſe rend

(q) Op. omn. Tom. 2.

rend à niveau dans les deux jambes, mais comme il ſe paſſe un tems conſidérable avant que le liquide ſe ſoit rendu à niveau, il parait que nous devons plutôt penſer que c'eſt de l'air développé, car il n'eſt pas probable qu'il fallut autant de tems à l'air du récipient pour ſe remettre dans ſon prémier état, & qu'il peut ſe faire que l'abſorbtion de l'air generé ſoit plus difficile, & dure plus long tems, comme nous en avons des exemples dans celle qui ſe fait par les vapeurs ſulfureuſes, & même par la poudre brulée, laquelle ſelon ce que nous avons vû dûre pendant pluſieurs jours; (*r*) enfin dans les expériences qui j'ai fait avec les vaſes ſoigneuſemeut maſtiqués je n'ai jamais trouvé qu'une partie du mélange reduite en ſel (*ſ*), & encore après long tems, ayant enſuite expoſé à l'air le reſte, qui était encore liquide il s'eſt auſſi transformé en ſel, & j'ai toujours trouvé au fond du vaſe dans lequel j'avais placé celui ou dévaient ſe méler les ſubſtances, une quantité d'humidité qui ne peut-être à mon avis que les vapeurs condenſées.

24. Cet air qui ſort ainſi, lorſque ces deux liquides ſont mélés enſemble ne doit différer de celui de la poudre à Canon, qu'en ce qu'il ne ſe trouve point mélé avec de vapeurs ſulfureuſes, & par cette même raiſon ſi l'extinction du feu ne dépend que de la mauvaiſe nature de ces ſortes d'exhalaiſons, la flamme ne devrait rien ſouffrir, c'eſt cependant ce qui n'arrive pas, car un flambeau allumé étant introduit dans un vaſe, ou ces deux liquides ayent été combinés, s'éteint dans le moment, c'eſt un phénomene des plus ſinguliers, je m'en ſuis cependant aſſûré par pluſieurs expériences réiterées.

25. Ce phénomène ne paroit qu'une conſéquence de la Théorie que nous avons donné ſur l'extinction du feu, & de la flamme dans des lieux clos (com. pag. 22.); car l'air

(*r*) Voi. la not. k.

(*ſ*) Je crois que l'on me diſpenſera de donner le manuel des expériences; il ſont trop aiſés a être imaginés.

l' air qui eſt chaſſé des ſubſtances, & celui qui eſt dans le vaſe ſouffrent des altérations cauſées par la chaleur excitée enſuite de la mixtion de ces liquides, comme s' il paſſait autour d' un corps échauffé à un égal degré de chaleur, ou plus encore que ſi on le lui communiquait par un feu extérieur d' égale intenſité.

18. Il n' eſt par conſéquent pas extraordinaire que Mr. Muſchembroek n' aie pu entrétenir la flamme dans les airs *factices*, puiſque s' étant ſervi à peu près de la méthode de Mr. Halles pour ſe les procurer, leurs procédés dépendent tous de ce principe. Ceci eſt encore confirmé par l' expérience que j' ai fait dans cette vûe; je combinai dans un récipient fermé (de la même maniére que j' ai fait pour le nitre regéneré) du vinaigre diſtillé avec de l' eſprit de ſel ammoniac, (*t*), quelque tems après l'efferveſcence, j'introduiſis le flambeau allumé, & il ne me fut pas poſſible de connaître qu' il eut ſouffert la moindre altération.

27. Il n' eſt pas douteux que l' air dévéloppé de quelque corps que ce ſoit, par l' action du feu, ou par une chaleur inteſtine, ne ſert aucunement à la conſervation de la flamme, & du feu, & que les moiens dont on ſe ſert per rendre ces fluides propres à la reſpiration des animaux, & à conſerver leur élaſticité, ne ſont d' aucune utilité pour entretenir le feu (*u*) cependant en conſéquence de la Théorie établie, que la chaleur endommage tellement l' air qu' il ne peut acquerir ſes proprietés ſans ſe rénouveller, à moins qu' on ne lui faſſe ſubir par le moyen de la glace un froid violent, & même pendant pluſieurs heures, j' ai tenté cet expédient ſur les fluides, & m' étant procuré une quantité de fluide élaſtique de la poudre dans un vaſe convenable

(*t*) Le mélange de l' eſprit de nitre avec celui d' Ammoniac fait un efferveſcence que l' on dit froide, en effet elle ne manifeſte aucune chaleur ſenſible.

(*u*) Comme on peut le voir au long dans les *comm. pag.* 22.

Digitized by Google

venable pour l'éprouver, je començai par introduire un flambeau allumé dans ce fluide non purgé, mais à peine en eut-il aproché qu'il fût éteint, je fermai auſſitôt le trou par le moyen d'une platine bien aiuſtée, & j'entourai le vaſe de glace ſur laquelle je mis du ſel ammoniac, j'eus ſoin enſuite de faire ajouter à propos de la glace, & du ſel, & après environ 12 heures, j'ouvris la platine ſans exciter le moindre mouvement, & j'introduiſis enſuite le flambeau allumé qui ſe conſerva auſſi bien que s'il eut été dans l'air commun. Des pareilles expériences faites ſur l'air corrompu par l'efferveſcence du ſel de tartre avec l'eſprit de nitre donnérent les mêmes réſultats (*v*).

28. De tout ce que je viens de dire, il eſt clair que les moyens propres pour rendre à l'air la propriété d'être conſtamment élaſtique, & de ſervir à la reſpiration des animaux, ne peuvent pas réuſſir à lui rendre auſſi celle d'entrétenir le feu, parceque les fumées, les exhalaiſons, & les vapeurs endommagent les deux prémieres, & la chaleur détruit celle-ci; mais comme ces cauſes ſont réunies dans l'inflammation de la poudre, ainſi tout ces caractéres de l'air doivent néceſſairement ſouffrir (*x*) toutes ces altérations,

29. Après avoir établi ce principe univerſel dans le plein j'ai voulu éxaminer les effets, qui ſurviendraient en tirant

une

(*v*) Dans le mémoire précédent j'ai mis ſous un point de vuë le plus clair qu'il m'a été poſſible les raiſons pourquoi le fluide élaſtique de la poudre, quoiqu'il ſoit de l'air pur, ne peut cependant pas être propre à entretenir le feu; elles ſuffiſaient toutes ſeules à détruire la ſeconde objection du Célébre Mr. Muſſchembroek, & à donner plus de poids à mon ſentiment que j'avais appuyé d'un nombre de faits, mais comme il nous eſt réüſſi de jetter les fondemens, d'une Théorie ſur cet importante partie de la Phyſique, & que ne nous étant pas contenté d'avoir démélé la véritable cauſe de la dépravation de l'air par rapport à la nourriture de la flamme dans des lieux clos, nous avons trouvés des moyens propres à lui rendre cette vertu, j'ai crû néceſſaire de tenter des expériences, par leſquelles je puſſe confirmer de plus en plus ce que j'avais dit, d'autant plus que le mobile de nos recherches ſur ce point intéréſſant, avait été celui de décider la difficulté de l'Auteur mentioné.

(*x*) Cet article a été traité plus au long dans le *comm. pag.* 33.

Digitized by Google

une partie de l'air du récipient, à cet effet je diſpoſai ſelon la méthode dont ſe ſervent les Phyſiciens une petite phiole qui contenait de l'eſprit de nitre, enſorte qu'on pouvait par le moyen d'une verge, qui paſſait à travers le ſommet du récipient, faire verſer le liquide dans un vaſe où j'avais mis de l'huile de tartre, ſans introduire de l'air: je pompai à peu près la moitié de l'air, & après cela je procurai de ſaturer le mélange; la mixtion ſe fit avec une effervefcence extraordinaire, de ſorte qu'une partie du mélange ſe répandit ſur la platine avec un grand bouillonement, les oſcillations ſuivirent à l'ordinaire, & après que le mouvement eut ceſſé, le mercure qui était reſté ſuſpendu dans la jambe expoſée à l'air commença à remonter dans l'oppoſée, & s'arrèta enſuite à peu près à la même hauteur qu'il était avant la mixtion, je laiſſai l'appareil pendant long tems, & n'étant ſurvenu aucun changement au mercure, j'obſervai que le ſel n'était formé que çà & là en très petite quantitè, j'expoſai à l'air cette mixtion, & le ſel ſe forma.

30. Je répétai deux fois cette expérience pour y introduire le flambeau qui s'y conſerva allumé, mais on en voit aſſés la raiſon; c'eſt qu'en ouvrant le trou de la platine il s'introduiſit beaucoup d'air commun & frais, qui ſervit à remplacer celui qui manquait.

31. L'on voit par tout ce que je viens de rapporter qu'il eſt très naturel qu'il ſe dévéloppe de l'air en mêlant les deux liquides, & qu'il ſoit enſuite entiérement réabſorbé; que le ſalpêtre, qui ne différe du nitre régéneré que parcequ'il eſt naturel, contient une grande quantité d'air; en conſéquence de ces notions d'ailleurs confirmées par une infinité d'autres expériences, que les Phyſiciens ont fait, je cherchai de m'aſſurer ſi le ſalpêtre a par lui même la proprieté expanſive, & je fis l'expérience, de la maniere, que je vais décrire.

Digitized by Google

Je ſcellai hermétiquement dans une phiole de verre, du ſalpêtre, la quantité du ſel occupait environ $\frac{1}{3}$ de la capacité: je la mis enſuite ſur le feu que j' augmentai graduellement, enſorte que l' air ſe développait peu à peu ſans ſouffrir une grande raréfaction au commencement de l' opération, & ſe trouvait enſuite très raréfié, lorſque ce qui reſtait était contraint de ſe déployer; aprés cinq à ſix minutes la phiole ſe briſa avec quelque détonnement; m'étant déterminé à la répéter, je jugeai à propos de ſceller en même tems un autre phiole avec un bouchon de liége pouſsé à force, & bien battu, & après l'avoir miſe ſur les charbons en même tems qu' un autre fermée à la lampe, elle força le bouchon à un hauteur aſsès conſidérable, & il tomba à trois pieds loin du rechaud quelque tems avant que l' autre éclata.

33. Il eſt bon de remarquer que lorſque le bouchon fut loin, il ne ſortit rien du ſalpêtre qui était reſté liquide au bas de la phiole ſans un grand bouillonement d' où il s' enſuit que le ſalpêtre a la propriété de forcer les obſtacles qui le retiennent, lorſque par le moyen du feu il peut dégager l' air qu' il contient, quoiqu' il ne s' enflamme pas pour autant.

34. Le ſucre a auſſi cette vertu, mais elle eſt moins ſenſible; je l'aſſujettis aux mêmes expériences, & quoique il ne la manifeſte pas dans un tems auſſi court, ni avec autant de violence il ne laiſſe pas de briſer la phiole, & de chaſſer le bouchon. Il ne ſerait peut-être pas hors de propos d'examiner tous les ſels eſſentiels; mais je réſerve cet examen à un autre tems.

35. Le ſouffre contient un acide vitriolique, & une matiére phlogiſtique, il a un nombre de propriétés qui nous ſont connues. Le Célébre Mr. Stahl s' eſt diſtingué dans l' analiſe qu' il en a fait. Mrs. Halles, Muſchembroek, &

après

Digitized by Google

après eux bien d'autres Phyſiciens ſont d'avis que les vapeurs du ſouffre brûlé abſorbent l'air.

36. Ces deux grands Hommes on décidé ce fait d'après les expériences dont ils ſe ſont ſervis, mais comme elles ne ſont pas tout à fait déciſives, parceque le ſouffre étant allumé hors du récipient donne lieu à la raréfaction de l'air qui l'environne, & que lorſqu'il ſe refroidit, l'eau doit néceſſairement monter conſidérablement (*y*), j'ai jugé a propos de lui mettre le feu avec un miroir ardent, & dés qu'il eut diſcontinué de brûler, je le laiſſai durant deux jours entiers, & j'ai obſervé que le mercure monta ſenſiblement au deſſus du niveau environ $\frac{2}{7^e}$ de ligne: cette aſcenſion cependant ſe fit dans moins de quatre heures de tems; j'ai remarqué auſſi que durant l'inflammation du ſouffre le mercure baiſſait dans le ſiphon, ce qui m'avait fait croire qu'il ſe développait de l'air, mais ayant eu ſoin de mettre le flacon à l'abris des rayons du ſoleil, ne laiſſant à découvert que ce qui était dardé par le foyer du miroir, j'ai vû une grande différence dans l'abbaiſſement, que je crois d'autant plus cauſé par la raréfaction, qu'en le plongeant dans de l'eau qui avait aquis la température de l'air ambient, le liquide rémonta aſſés viſiblement juſqu'au niveau ſans diſcontinuer.

37. Le charbon eſt la troiſiéme ſubſtance qui entre dans la compoſition ordinaire de la poudre à Canon; il eſt trèsporreux, & on prétend que c'eſt ce qui lui donne la couleur brune que l'on lui voit, & un Célébre Phyſicien (*a*) a obſervé que c'eſt en conſéquence de cela qu'il prend feu aiſément: il eſt compoſé de parties terreſtres, & de parties craſſes, ou phlogiſtiques. Cette matiére ne nous fournit pas

(*y*) Stat. des végét.
(*z*) Boher. chaem.

pas des réflexions plus particuliéres. Je m' en vais donner maintenant comme je l' avais promis un détail des réſultats que j' ai eu de pluſieurs mélanges que j' ai jugé à propos d' eſſayer.

38. On obtient une eſpéce de fuſée en mettant deux parties égales de ſouffre, & de ſalpêtre dans un creuſet qu'on expoſe enſuite au feu, ou dans un creuſet enflammé.

39. En ſubſtituant du charbon au ſouffre il ſe fait une explosion, & une déflagration ſubite, ſi l'on jette les deux matières dans un creuſet enflammé, ou que l' on fait dévenir rouge; cette déflagration eſt plus forte que la précédente.

40. Le ſouffre intimément broyé avec le charbon ſe conſume plutôt que lorſqu' il eſt ſeul, ſi le charbon n' eſt pas réduit en poudre il s'envéloppe de la flamme du ſouffre ſans pourtant s' embraſer, & ſi ce charbon eſt en feu il s' éteint à méſure que le ſouffre ſe fond, & s' enflamme: ſi enfin on jette un charbon dans le ſouffre fondu la flamme de toute la ſurface l' entoure auſſitôt preſque en forme conique.

41. On parvient à un mélange des plus conditionnés pour la poudre en mettant 7 parties de Salpêtre, une de ſouffre, & une de charbon, cette combinaiſon nous ébauche tous les phénomènes de la poudre quoiqu' elle ne ſoit pas encore manufacturée.

42. Je crois ne devoir pas non plus paſſer ſous ſilence, que la poudre s' enflamme dans quelqu' air infecté que ce ſoit, c' eſt ce que j' ai tâché de bien aſſûrer, & il m' eſt réuſſi d' enflammer de la poudre dans un endroit rempli de la fumée d' une chandéle, une autre fois dans un flacon rempli de vapeurs de poudre, & enfin dans un autre plein de vapeurs ſulfureuſes, il eſt vrai que dans les deux derniéres elle tarda plus long tems à s' enflammer apparemment parceque ces vapeurs avaient fixé une partie de l' air.

43. Un

43. Un mélange de ſouffre & de ſalpêtre étant moins facile à s' enflammer qu' un mélange de charbon, & de ſalpêtre, il me parait qu' on doit conclure de là que le phlogiſtique du charbon quitte plus facilement, & plus promptement les parties terreſtres auxquelles il eſt uni pour s' attâcher à l' acide nitreux & le faire détonner, que celui du ſouffre; parceque celui-ci ſe trouve déja réteau par l' acide vitriolique avec lequel il a une grande affinité.

44. En conſidérant donc la plus grande facilité que le dernièr mélange en queſtion a de ſe décompoſer plus ſimultanéement, ce qui ne peut de moins de lui procurer plus de force, & faiſant enſuite attention aux déſavantages que le ſouffre apporte aux armes à feu., je ſuis porté à croire que la poudre que l' on férait ſans ſouffre, ne pourrait-être que d' un très grand uſage dans pluſieurs occaſions (*a*).

45. Les effets de la poudre ſe manifeſtent donc en conſéquence de l' inflammation du ſouffre qui met enſuite en feu le charbon pilé lequel donnant de l' effort au feu, communique un plus grand dégrè de chaleur au Salpêtre qui eſt décompoſé par l' action du phlogiſtique auquel ſon acide s' uniſſant ſe diſſipe avec bruit, & ainſi en vertu de l'action, & de la réaction de l' air généré, & de l'ambient, le feu ſe communique aux grains, ce qui ſert à prouver auſſi, comme le démontre Mr. le Chev. D' Arci, (*b*) que l' inflammation de la poudre eſt ſucceſſive (*c*) ainſi que j' ai déja fait

ſ obſerver

(*a*) Cette conjecture que je n' ai déduit, que des faits, ſe trouve confirmée par des expériences faites dans cette vüe par un habile homme; il en donne un long détail dans l'Encyclopédie à l' article *feu artificiel*. Les eſſais qu' il a fait pour décider ce point paraiſſent aſſés déciſifs, de ſorte que je me diſpenſe volontiers de mettre au long ici les autres réflexions qui m' ont porté à jetter cette propoſition, on ſera ſatisfait de celles que l' on trouve à l' endroit cité.

(*b*) Mém. de l' Accad: des Scienc. de Paris ann. 1750.

(*c*) Preſque dans tous les calculs qu' on a établi pour déterminer la viteſſe d' un boulet chaſſé par la poudre hors du Canon, ou pour déterminer la force abſolue de la poudre, on a poſé que l' inflammation fut inſtantanée, parceque l' on n' avait pas tenté bien ſoigneuſement de s' en aſſûrer par l'expérience: d'où l' on peut inférer que ces calculs ne ſont pas irrépréhenſibles.

Digitized by Google

obſerver (*d*) : il eſt bon de rémarquer ici en paſſant que cette union ne peut ſe faire que par la force ou vertu d'affinité, or il eſt probable que l' air ſe dégage auſſi vite que l' acide ſe diſſipe, & que c' eſt cette même force qui contraint les deux ſubſtances à s' unir réciproquement, qui en détermine le dégré.

46. Quoique le ſucre ait la propriété de ſe dilater comme nous avons vû (34), & de forcer en conſéquence les obſtacles qui s' oppoſent à ſon expanſion, il ne m' a cependant jamais donné aucune marque aſſûrée qu' il pû faire quelque exploſion, quoique je l' euſſe melé avec du ſouffre, & du charbon ſelon pluſieurs proportions : il ne faiſait que fuſer très-lentement, lorſqu' il prenait feu.

47. Les matiéres graſſes, & huileuſes, comme le ſuif, la cire, les réſines combinées avec le ſalpêtre produiſent le même effet que ſi l' on avait melé du charbon avec du ſalpêtre, & elles n' agiſſent que lorſque le feu les a réduites en une eſpéce de charbon : le camphre quoiqu' il ſoit auſſi de la nature des matiéres précédentes, cependant comme il eſt ſi facile à s' enflammer, & qu' il ne peut pas changer comme les autres, il ne procure pas une déflagration auſſi violente au ſalpêtre, car le mélange s' enflamme à une chaleur très-modique.

48. On voit clairement par ce que je viens de rapporter qu' il faut que les matiéres ſoient propres à être réduites en charbon pour déflagrer avec le ſalpêtre, c' eſt à dire qu' elles puiſſent ſe dépouiller de l' eau, & des autres élémens par l' action du feu, & que le phlogiſtique ne ſe trouve plus uni qu' à des parties terreſtres; d' où il parait que les autres élémens ont la propriété de retenir le phlogiſtique, ou celle d' empêcher qu' il agiſſe, en effet nous avons vû que le ſouffre dont le phlogiſtique eſt fortement retenu par l' acide vitriolique (43) fait une déflagration

(*d*) Voi. le mém. pag. 9. (14).

gration plus lente avec le ſalpêtre, que ne fait le charbon (39).

49. Le ſucre qui quoique mêle avec des matiéres graſſes, ne fait aucune exploſion non plus que plúſieurs autres ſubſtances qui contiennent d'ailleurs une grande quantité d'air, ne ſerait-il peut-être pas, comme elles, incapable de déflagration, parcequ' il ne ſe trouve pas dans le melange une action d'affinité ſuffiſante à les décompoſer ſubitement, & par conſéquent à donner un effort libre, & prompt à l'air qui eſt engagé, malgré l'action de la chaleur, & du feu? & quelques unes comme le camphre ne ſerait ce point, parcequ'étant trop faciles à s'enflammer, elles ne laiſſent pas le tems aux autres matiéres d'acquerir un dégrè de chaleur ſuffiſant pour ſe décompoſer? car ſi l'on ſubſtitue le camphre au ſouffre dans la compoſition de la poudre, ce mélange a beaucoup moins de force que celui du ſouffre, & du ſalpêtre.

50. La poudre fulminante ayant beaucoup de rapport à la matiére que j'ai traité juſqu'à préſent: je crois en devoir maintenant faire l'objet de mes recherches.

51. L'exploſion de la poudre fulminante comme l'on ſait, eſt accompagnée d'un détonnement très violent, & infiniment ſupérieur à celui de la poudre à Canon; on à de plus remarqué qu'à l'occaſion de ſa décompoſition elle perce la cuillére de metal dans laquelle on l'expoſe au feu, de ſorte que pluſieurs Phyſiciens ont penſé que cette poudre avait une particuliére direction vers le bas: des autres, pour donner une explication du bruit horrible dont ſon exploſion eſt ſuivie, ont crû que cet'étrange phénomène dépendait d'un plus grand développement de fluide: Mr. Halles cependant remarque très ſenſément que cet accraiſſement n'eſt pas cauſé par une plus grande quantité d'air qui ſe déploye, & il l'attribue à la fixitè du ſel de tartre, dont l'air ne peut ſe développer que par un très grand dégré de chaleur.

Digitized by Google

52. Sans m' arrêter à donner la deſcription de toutes les expériences que j' ai fait, je rapporterai ſeulement ce qui m' en eſt conſtamment réſulté.

I.

En mettant le feu à la poudre fulminante de la maniére que l' on le met à la poudre à Canon, elle ne fait que décrépiter ſans aucun détonnement, & ce n' eſt qu' avec peine qu' elle s' enflamme.

I I.

Pour pouvoir ſe décompoſer, elle doit prémiérement entrer en fuſion, ſoit qu' elle ſoit en plein air, ou dans le vuide.

I I I.

Le fluide élaſtique qui en eſt produit a à peu prés les mémes caractéres que celui de la poudre à canon, il eſt pernicieux à la reſpiration, il ne conſerve pas toute ſon élaſticité, & n' entretient pas le feu; on ne doit pas s'en étonner, car j' ai fait voir ci-devant, & dans le mem: pag: 11. & ſuiv: que les exhalaiſons ſulfureuſes en ſont la cauſe.

I V.

Ce mélange enfin qui détonne avec tant de violence dans l' air; qui ſe fait jour à travers une cuillére, ne fait aucun bruit dans le vuide, & ne briſe pas ſeulement un flacon de verre le plus mince. J' ai fait cette expérience d'autant plus ſoigneuſement qu' elle devait me fournir des grandes lumiéres; l' appareil fut des plus ſimple, un flacon ou j' avais mis de cette poudre était maſtiqué à un long tuyau de verre, qui entrait dans un petit récipient muni d' une tube de barométre, aprés le vuide fait, indiqué par la hauteur de 27 pouces environ du mercure dans le tube, on plaça un rechaud plein de charbons en feu, aprés quelque tems la poudre ſe décompoſa, & j' en fus averti par la lumiére qui en émana; je ne quittai point le barométre de vuë, & la depreſſion du mercure fut très grande

au-

au prémier inſtant, & diminua enſuite conſidérablement. Enfin au tems qu'il devait avoir aquis la température de l'air ambient, je trouvai le volume du fluide moindre, que ſi ç'avait été de poudre à Canon, d'où l'on peut conclure avec aſſûrance que ces grands effets ne dépendent pas d'un plus grand dévéloppement d'air.

53. Le phénomène dont j'ai fait mention ci devant de percer une cuillére, eſt donc celui ſur le quel on s'eſt fondé pour attribuer à cette poudre la proprieté d'exercer ſa vertu élaſtique vers le bas: elle eſt cependant ſi ſurprenante qu'on ne ſaurait jamais imaginer en vertu de quoi les loix ordinaires de la nature feraient ici violées; c'eſt précíſement ce qui m'a determiné à conſtater ce fait par les expériences avant que de m'y repoſer.

54. J'ai commencé par dire (52. IV.) que dans l'expérience que je fis dans un flacon vuide d'air, il n'y eut aucun détonnement, & que le verre n'en a rien ſouffert: j'ai mis une autre fois de cette poudre entre deux lames minces, & concaves enſorte qu'elles en étaient remplies, je les liai enſemble, & les mis au milieu des charbons ardents, aprés quelque tems il ſe fit une détonnement horrible, & je ne trouvai plus que quelque petit reſte des lames: mais pour m'aſſûrer encore d'avantage de ce fait je fis menager deux petites cuilleres, enſorte qu'en rempliſſant l'eſpace concave de poudre fulminante l'air extérieur ne pouvait s'y introduire, je les mis enſuite dans le feu ayant pris mes précautions pour obſerver ſans riſque; dans quelque tems de là, la cuillére ſupériere fut chaſſée en haut avec une impétuoſité étonnante, & celle d'en bas ne ſouffrit rien.

55. L'on voit évidemment par ces expériences prémiérement que la force élaſtique de cette poudre eſt uniforme en tous ſens, & on peut déduire en raprochant ce que

j'ai

j'ai dit au commencement de ce paragraphe, que puiſque les phénomènes qui ſe manifeſtent dans l'air n'ont plus lieu dans le vuide, il faut que la viteſſe avec laquelle l'air ſe développe ſoit ſi ſubite, & ſi grande que l'air extérieur ne puiſſe avoir le tems de céder, & que par conſequent le fluide rencontre de la part de l'air une réſiſtence ſupérieure à celle de la cuillére, qui a déja ſouffert par l'action du feu, & par celle du foye de ſouffre qui ſe forme dans ce tems. L'on remarque même que ſi la cuillére eſt de fer, elle n'eſt point auſſi aiſément percée.

56. Si l'on conſidére que la réſiſtence d'un milieu eſt en raiſon compoſée de la denſité du même milieu, & de la viteſſe du fluide qui heurte, & que la poudre à Canon ne rencontre pas aſſés de réſiſtence de la part de l'air pour pouvoir réagir avec autant de force que la poudre fulminante ſur les corps ou'il eſt placé, il faudra accorder à la viteſſe immenſe du dévéloppement du fluide, l'action étonnante de cette poudre, qui par conſéquent doit être infiniment ſupérieure à celle de l'autre.

Si donc la viteſſe ſeule avec laquelle un fluide ſe développe, contribue ſi fort à ſon action, de maniére que les effets de la poudre fulminante ne ſoient pas comparables pour l'intenſité avec ceux de la poudre à Canon, il ſera moins extraordinaire que par la lenteur du développement, ces matiéres dont nous avons parlé (46. 47.) qui contiennent une égale, & peut-être une plus grande quantité d'air que la poudre à Canon, ne puiſſent pas produire des effets aprochans des ſiens.

57. L'inflammation d'un mélange de charbon, & de ſalpêtre déflagre plus promptement comme nous avons vû (33. 24.) que celui du ſouffre, & du ſalpêtre, donc cette poudre aura beaucoup plus de force que celle ou il entre du ſouffre, & par conſéquent outre l'épargne que l'on fera

l'on

l'on obviera encore aux endomagemens cauſés par le ſouffre, ſur tout à l'évaſement des lumiéres (*e*).

58. Il eſt connu que la poudre à Canon s'enflamme beaucoup plus vite, dans des eſpaces renfermés comme dans les piéces d'Artillerie, (*) & dans les mines, qu'en plein air: Outre cela les obſtacles qu'elle rencontre ne la laiſſent éclater que lorſque la plus grande partie de ſon fluide eſt développé; c'eſt ce qui fait que ſon action eſt preſque inſtantanée & ce qui rend ſes effets ſemblables à ceux de la poudre fulminante.

59. Si nous faiſons attention à préſent aux ſubſtances qui entrent dans la compoſition de la poudre fulminante nous pourrons peut être découvrir d'ou dépendent ſes effets étonnans. Le ſouffre avec le ſalpétre fait une poudre qui miſe dans le creuſet fuſe lentement, & donne une exploſion très faible, qu'on ajoute enſuite à ce mélange du ſel de tartre, ce ſera à la décompoſition qui s'en fera que l'on aura tous ces phénomènes ſurprénans; donc la violence de l'exploſion, & du détonnement ſeront un effet du ſel, cauſé ou par l'humidité ou par l'alkalinité; ce n'eſt pas par l'humidité, & cela par pluſieurs raiſons. la prémiere ſe tire de la maniére avec laquelle elle s'enflamme, on obſerve en effet à cette occaſion qu'elle eſt non ſeulement toute déſſechée mais qu'elle doit être en fuſion (51. II.): la qualité de l'Alkali pour que cette poudre ſoit parfaite nous fournit une ſeconde raiſon, il doit être parfaitement calciné, car ſi l'eſt humide il ne fait plus autant d'effet; une poudre de cette eſpéce que j'ai fait me fournit la confirmation de ceci, elle etait faite de deux parties de ſalpétre, une de ſouffre, & deux de tartre réduit en charbon

(*e*) Je me crois diſpenſé de faire ici des applications de cette Théorie à l'uſage de l'artillerie, ces recherches demanderaient un tems plus long., & un examen plus réflechi, d'ailleurs Mr. le Chev. D'Antonj, Directeur des écoles Théoriques de l'Artillerie prépare ſur cette matiére un ouvrage qui ſera une nouvelle preuve de l'étendue de ſes lumiéres dans toutes les ſciences qui peuvent ſervir à la perfection de celle ci. (*) Mém. de l'Acad. de Scienc. an. 1750.

Digitized by Google

bon cette poudre contenait aſſurément beaucoup plus d'eau que la fulminante ordinaire, & cependant ne détonnait pas avec autant de violence quoique elle ſurpaſsa de beaucoup l'exploſion de la poudre à Canon.

61. Une autre eſpéce de poudre fulminante que j'ai fait qui n'attire pas l'humidité, & qui n'a encore été indiquée par perſonne que je ſache, me préſente un troiſiéme argument contre l'action de l'humidité, & concourt à faire voir que ces effets dépendent de l'alkalinité. J'employai du ſel de ſoude qui ne contient point d'eau, & dont les criſtaux n'attirent non ſeulement pas l'humidité de l'air, mais ſe réduiſent encore comme en farine, les doſes étaient les mêmes, parceque je ne cherchais pas de déterminer celles qui me donneraient la meilleure poudre, je l'expoſai à l'accoutumé ſur le feu, & elle ne détonna pas avec moins de force que l'ordinaire, j'oſerais même avancer qu'elle était plus forte.

62. Enſuite donc des réflexions que nous avons fait ſur ce ſel, & rémarquant ici que c'eſt l'alkali le plus puiſſant qu'il y ait, après celui qu'on retire des cendres des plantes terreſtres, il me parait que l'on doit conclure que la différence des effets qu'on voit arriver en faiſant décompoſer un mélange de ſouffre & de ſalpêtre, & un mélange de ſouffre, de ſalpêtre, & de ſel de tartre, ne dépend aucunement de l'humidité, & que l'alkalinité eſt celle qui les produit.

63. J'ai cependant encore voulu m'aſſûrer s'il ne ſe trouve point d'autres cauſes qui agiſſent auſſi; il me paraiſſait que le dègré de chaleur dévait y contribuer. J'ai à cet effet tenté de faire du foye de ſouffre avec un alkali volatil, & m'étant reuſſi, je le mélai avec du ſalpêtre, mais le mélange ne fit aucune exploſion, probablement parcequ'il s'eſt diſſipé avant que le ſalpêtre ait pû ſe décompoſer; de façon qu'il parait clair qu'il eſt néceſſaire

que

que les matiéres du mélange puiſſent acquérir un certain dégré de chaleur.

64. Je penſe que l'action de l'alkali ſur les autres matiéres vient de ce que, dans le tems que les ſubſtances ſe fondent, il ſe forme un foye de ſouffre dans lequel le phlogiſtique étant uni à un ſel neutre, il s'en ſépare moins difficilement que lorſqu'il ne ſe trouve qu'avec l'acide vitriolique, dans le ſouffre même, & qu'il peut par conſéquent ſe dévélopper avec plus de viteſſe pour détonner avec l'acide nitreux, tout ceci ſemble encore être confirmé par les expériences que j'ai fait.

65. En prémier lieu ayant ſubſtitué du charbon au ſouffre il ne s'enſuivit plus aucune fulmination, mais comme dans ce cas le phlogiſtique a pour baſe des parties terreſtres, & l'alkali n'ayant aucune action particuliére ſur cette terre, le dévéloppement du phlogiſtique ne peut pas être favoriſé.

66. Je fis enſuite une poudre compoſée ſucceſſivement de pluſieurs doſes de tartre vitriolé, de charbon, & de ſalpêtre, croyant qu'il ſe ſerait peut-être fait un foye de ſouffre, lequel en ſe décompoſant avec le ſalpêtre aurait pû faire le mêmes effets que la poudre fulminante, mais il ne me reuſſit pas, & ce mélange au contraire fit un explosion plus lente que ſi je n'y avais point mis du tartre vitriolé, ce qui me fait croire que le dégré de chaleur néceſſaire au ſalpêtre pour ſe décompoſer avec le charbon, eſt moindre, que celui qui eſt néceſſaire pour faire ce foye de ſouffre (*f*) & que par conſéquent le charbon détonne avec le ſalpêtre avant que le phlogiſtique puiſſe s'unir au tartre vitriolé, & faire le foye de ſouffre.

(*f*) On voit aiſément que le foye de ſouffre dont je parle ne peut pas ſe faire à une chaleur auſſi modique que celui qu'on fait comunement.

Digitized by Google

67. Je fis enfin divers mélanges de charbon, & de ſalpêtre, auxquels j'ajoutai l'acide vitriolique uni à différentes baſes, affin d'avoir une eſpéce de poudre fulminante, dont les combinaiſons des compoſans fuſſent variées, mais je n'ai pas réuſſi non plus que dans celle du tartre vitriolé, je crois que ce que j'ai dit par rapport à celle-là ſert auſſi pour donner la raiſon de ce que je viens d'expoſer. Il me reſte encore bien des recherches, que je me ſuis propoſé ſur la poudre à canon, ſur celleci, & ſur le rapport, que peuvent avoir avec elles les métaux fulminans, mais je me réſerve de traiter plus amplement de la prémiére dans la traduction que je donnerai de l'ouvrage de Mr. Benjamin Robins, qui à déja été enrichi par les notes que le grand Géomètre Mr. Euler y a fait, & j'aurai occaſion une autre fois de parler des deux derniéres.

RE-

Digitized by Google

RECHERCHES
SUR LA NATURE, ET LA PROPAGATION
DU SON.

PAR M. LOUIS DE LA GRANGE.

INTRODUCTION.

QUOIQUE la Science du Calcul ait été portée dans ces derniers tems au plus haut dégré de perfection, il ne paroit cependant pas qu' on ſe ſoit beaucoup avancé dans l'application de cette Science aux phénomènes de la Nature. La Théorie des fluides qui eſt aſſurément une des plus importantes pour la Phyſique, eſt encore très imparfaite dans ſes élémens, malgré les efforts de pluſieurs grands Hommes

qui ont tenté de l'approfondir. Il en eſt de même de la matière que j'entreprens d'examiner ici, & qu'on peut avec raiſon regarder comme un des principaux points de cette Théorie. Car le Son ne conſiſtant que dans de certains ébranlemens imprimés aux corps ſonores, & communiqués au milieu élaſtique qui les environne, ce n'eſt que par la connoiſſance des mouvemens de ce fluide, qu'on peut eſpérer de découvrir ſa véritable nature, & de déterminer les lois qu'il doit ſuivre dans ſa propagation.

Newton, qui a entrepris le premier de ſoummetre les fluides au calcul, a auſſi fait ſur le Son les premières recherches; & il eſt parvenu à en déterminer la viteſſe par une formule, qui ne s'éloigne pas beaucoup de l'expérience. Mais ſi cette théorie a pû contenter les Phyſiciens dont la plûpart l'ont adopté, il n'en eſt pas de même des Géomètres qui en étudiant les démonſtrations ſur leſquelles elle eſt appujée, n'y ont pas trouvé ce degré de ſolidité, & d'évidence qui caractériſe d'ailleurs le reſte de ſes Ouvrages. Cependant aucun que je ſache, ne s'eſt jamais attaché à découvrir, & à faire connoître les principes qui peuvent les rendre inſuffiſantes; encore moins a-t-on entrepris de leur en ſubſtituer de plus ſurs, & de plus rigoureux (*).

Les

(*) Voici comment parle un des plus Célebres Géomètres de nôtre tems dans ſon excellent traité des fluides art. 219. *Ce ſeroit ici le lieu de donner des Méthodes pour déterminer la viteſſe du ſon, mais j'avoue que je ne ſuis point encore parvenu à trouver ſur ce ſujet rien qui pût me ſatisfaire: Je ne connois jusqu'à préſent que deux Auteurs qui ayent donné des formules pour la viteſſe du ſon, ſavoir M. Newton dans ſes Principes, & M. Euler dans ſa diſſertation ſur le feu qui a partagé le prix de l'Académie en 1738: La formule donnée par M. Euler ſans démonſtration eſt fort differente de celle de M. Newton, & j'ignore quel chemin l'y a conduit; à l'égard de la formule de M. Newton elle eſt démontrée dans ſes Principes, mais c'eſt peut être l'endroit le plus obſcur, & le plus difficile de cet Ouvrage. M. Jean Bernoulli le fils dans la Piece ſur la Lumière, qui a remporté le prix de l'Académie en 1736, dit qu'il n'oſeroit pas ſe flatter d'entendre cet endroit des Principes &c.*

Les Commentateurs des *Principes* ont à la verité tâché de rétablir cet endroit par une Méthode purement analitique, mais outre qu'ils n'ont enviſagé la queſtion que ſous un point de vüe tout-a-fait particulier ; leurs calculs ſont d'ailleurs ſi compliqués, & embaraſſés dans des ſuites infinies, qu'il ne paroit pas, qu'on puiſſe en aucune façon acquieſcer aux concluſions qu'ils ſe ſont efforcés d'en déduire.

J'ai donc cru qu'il étoit néceſſaire de reprendre toute la queſtion dans ſes fondemens, & de la traiter comme un ſujet entiérement nouveau, ſans rien emprunter de ceux qui peuvent y avoir travaillé juſqu'à préſent.

Tel eſt l'objet que je me ſuis propoſé dans les Recherches ſuivantes. Pour le faire mieux connoitre je commence par donner une idée de la théorie de M. Newton, & des difficultés aux quelles elles eſt ſujette.

C'eſt dans la ſection VIII. du II. Livre des *Principes* que ſe trouve renfermée toute cette théorie. L'Auteur conſidére d'abord la propagation du mouvement dans les fluides élaſtiques, & la fait conſiſter dans des dilatations, & des compreſſions ſucceſſives, qui forment comme autant de pulſations, & qui ſe répandent à la ronde par tout le fluide. Il paſſe enſuite à examiner comment ces pulſations peuvent être produites par le frémiſſement des parties d'un corps ſonore quelconque. Il imagine pour cela qu'une particule du fluide pouſſée par les vibrations du corps contigu condenſe par une certaine diſtance les particules ſuivantes, juſqu'à ce que la condenſation étant devenue la plus grande, les mêmes particules comencent à ſe dilater de part, & d'autre ; ce qui forme ſelon lui une infinité de fibres ſonores qui partent toutes du même point, comme d'un centre commun. Il veut de plus que chacune de ces premiéres fibres en engendre une autre égale à ſon extremité,

lorſqu'

lorſqu'elle a achevé une oſcillation entière, & celle-ci une troiſiéme, & ainſi ſucceſſivement, de ſorte qu'il ſe forme, pour ainſi dire, autour du corps ſonore pluſieurs voutes ſphériques, qui aillent toujours en s'élargiſſant, tout de même, comme l'on obſerve dans les ondes, qui s'excitent ſur la ſurface d'une eau tranquille, par l'agitation de quelque corps étranger que ce ſoit.

Voila quels doivent être ſelon cet Illuſtre Auteur les mouvemens des particules de l'air qui produiſent, & propagent de ſon: Mais M. Newton eſt encore allé plus loin; il a calculé tous les mouvemens particuliers, qui compoſent chacune des pulſations. Pour y parvenir il regarde les fibres élaſtiques de l'air comme compoſées d'une infinité de points phyſiques diſpoſés en ligne droite, & à égale diſtance les uns des autres. La méthode qu'il emploie pour déterminer les oſcillations de ces points conſiſte à les ſuppoſer d'abord iſochrones, & toujours les mêmes dans chacun d'eux. M. Newton prouve enſuite que cette hypothéſe s'accorde entierement avec les Loix méchaniques qui dépendent de l'action mutuelle, que les points exercent en vertu de leur reſſort; d'ou il conclut, qu'en effet ces mouvemens ſont tels qu'il les a ſuppoſé; & comme à chaque oſcillation il doit s'engendrer ſelon lui une nouvelle fibre égale, & ſemblable à la premiére, il trouve l'eſpace, que le ſon parcourt dans un tems donné en calculant ſeulement la durée d'une ſimple vibration.

M. Jean Bernoulli le fils dans ſon excellente Piéce ſur la Lumiére a auſſi déterminé d'après les mêmes hypothéſes la viteſſe du ſon; ſon procédé diffère pourtant de celui de M. Newton en ce qu'il a d'abord ſuppoſé que les vibrations des particules ſont parfaitement iſochrones; ce qui eſt préciſément, ce que ce Grand Géomètre s'étoit propoſé de démontrer. Auſſi n'eſt-il pas ſurprenant que ces deux Au-

teurs

Digitized by Google

teurs ſoient arrivés à la même formule pour la viteſſe du ſon: et l' accord apparent de leurs calculs ne peut être apporté comme une preuve des fondemens de la Théorie qu' on vient d' expoſer (*).

A l'égard des premiéres propoſitions ſur la formation des fibres élaſtiques, & ſur tout de leur comparaiſon avec les ondes, je crois inutile de m' arrêter davantage à les examiner. Car. outre que pluſieurs Auteurs en ont déja fait voir le peu de ſolidité, & l' inſuffiſance même pour l' explica-

(*) M. Bernoulli prouve à la vérité dans l'Ouvrage cité, que tout corps qui eſt tenu en équilibre par deux puiſſances égales, & directement contraires, s'il vient à être tant ſoit peu déplacé doit faire autour de ſon point de repos des oſcillations ſimples, & réguliéres. Mais cette théorie n' eſt guere applicable qu' au ſeul cas, ou il n' y ait qu' un corps mobile. Pour le faire ſentir, ſuppoſons d'abord ſelon cet Auteur, que le corps ſoit ſollicité ſelon deux diréctions contraires par les forces égales P, & Q, il eſt clair que ces forces ne pourront être que des fonctions de la diſtance du corps à un point fixe quelconque; donc ſi on lui fait parcourir une eſpace infiniment petit ds la ſomme des accroiſſement de ces deux forces ſera exprimé par pds, ce qui donnera par conſéquent la force accélératrice qui porte le corps vers ſon point d'équilibre; & comme on ne veut conſidérer que les mouvemens infiniment petits on ſuppoſera p conſtant, d' ou la force donnée déviendra proportionelle à la diſtance à parcourir ds, & les oſcillations ſe feront ſelon les loix connues de l' Iſocroniſme. Mais il n' en ſera pas de même s' il y a pluſieurs corps qui ſe ſoutiennent mutuellement en équilibre, quoique rangés tous ſur la même droite. Dans ce cas les forces P, Q, P^{I}, Q^{I}, P^{II}, Q^{II} qui agiſſent ſur chacun d'eux feront des fonctions de leurs diſtances intermédiaires, ainſi ds^{I}, ds^{II}, ds^{III} repréſentant les déplacemens infiniment petits de tous les corps, on aura pour les forces accélératrices des expreſſions de cette forme $pds^{I} + qds^{II} + rds^{III}$, ou p, q, r &c. peuvent être regardées comme conſtantes. D' ou il eſt aiſé de comprendre que les mouvemens des corps, ne feront plus aſtreints au ſimple iſochroniſme; & c' eſt proprement ce qui arrive aux particules des fibres élaſtiques de l' air. C' eſt auſſi par cette raiſon que le calcul qu'on trouve dans le Commentaire des *Principes* feroit encore inſuffiſant même quand il ne renfermeroit pas des approximations; puiſque on n' y conſidére que trois, ou quatre particules mobiles. M. D. Alembert a fait ſentir cette difficulté pour le cas d' une corde vibrante chargée de pluſieurs petits poids pag. 359. des Mémoires de Berlin pour l' année 1750.

*2

plication des phénomènes du Son (*), la maniére avec laquelle elles ſont préſentées dans les *Principes* fait voir évidemment que l'Auteur ne les adoptoit, que comme des ſimples hypothèſes pour ſimplifier la nature d'un problême aſſés composé de lui même. Et quand même ces hypothèſes ſeroient vraies, ne ſeroit-on pas en droit d'en exiger une démonſtration? Or cette démonſtration doit néceſſairement dépendre de la réſolution générale du problême propoſé. Il faut donc avoüer que la Théorie de M. Newton ſeroit même à cet égard bien éloigné de pouvoir entiérement ſatisfaire à ſon objet. Mais il y a plus le Théorème dans lequel il détermine les loix des oſcillations des particules eſt fondé ſur des principes inſuffiſants, & même fautifs.

Le Célèbre M. Euler paroit s'en être apperçu dès l'année 1727., comme l'on voit dans une Théſe ſur le Son ſoutenue à Bale la même année. Cependant M. Cramer eſt, je crois, le premier qui en ait donné une preuve ſolide, & convainçante (**). Il fait voir que le procédé de M. Newton peut égalemment s'appliquer à démontrer cette autre propoſition ſavoir: que les particules élaſtiques ſuivent dans leurs mouvemens les lois d'un corps peſant qui monte, & qui tombe librement; ce qui eſt tout-a-fait incompatible avec l'iſochroniſme des oſcillations, que l'Illuſtre Auteur Anglois a prétendu établir. Cette remarque ſeule paroitroit ſuffire pour faire tomber entierement la Théorie en queſtion. Cependant comme les grands Hommes ne doivent être jugés, que d'aprés l'examen le plus exact; & le plus rigoureux, l'on auroit tort de la rejetter

(*) Voies la ſuite de l'article des fluides cité ci-deſſus. Vojés encore le Mémoire de M. de Mairan dans l'Académie de Paris année 1737., la Phyſique de Perrault, & d'autres.

(**) Vojés les Commentaires des *Principes*.

Digitized by Google

ter, avant que d'en avoir démontré l'inſuffiſance d'une maniére qui ne laiſſa plus rien à déſirer.

Voila le premier pas que j'ai penſé dévoir faire en entrant dans les recherches que je m'étois propoſé ſur la nature, & la propagation du ſon.

J'ai donc commencé par étudier avec toute l'attention dont j'ai été capable les propoſitions de M. Newton dont il s'agit, & j'ai trouvé en effet qu'elles ſont fondées ſur des ſuppoſitions incômpatibles entr'elles, & qui portent néceſſairement à faux. C'eſt ce que j'ai taché de faire voir par deux voies différentes dans le premier Chapitre de la Diſſértation ſuivante. Cet objet ainſi rempli, je me ſuis appliqué à rechercher des méthodes directes, & générales pour réſoudre le problême propoſé, ſans emploier d'autres Principes que ceux qui tiennent immédiatement aux lois connües de la Dinamique.

Pour donner à mes recherches le plus de généralité qu'il eſt poſſible, & pour les rendre en même tems applicables à ce qui ſe paſſe réellement dans la nature, j'ai d'abord enviſagé la queſtion ſous le même point de vue ſous lequel tous les Géomètres, & les Phyſiciens l'ont regardé juſqu'ici; & je doute qu'on puiſſe jamais reduire le problême ſur les mouvemens de l'air qui produiſent le ſon, à un énoncé plus ſimple, que celui-ci. Savoir.

Etant donné un nombre indefini de particules élaſtiques rangées en ligne droite qui ſe ſoutiennent en équilibre, en vertu de leurs forces mutuelles de répulſions, déterminer les mouvemens, que ces particules doivent ſuivre dans le cas qu'elle aient été, comme que ce ſoit, dérangées, ſans ſortir de la même droite.

Pour en faciliter la réſolution, je ſuppoſe ſeulement que les particules ſont toutes de même grandeur, & doüées d'une même force élaſtique, & de plus, que leurs mou-

vemens

Digitized by Google

vemens ſont toujours infiniment petits: conditions que je ne crois pas pouvoir porter la moindre atteinte à la nature du problême enviſagé phyſiquement.

En examinant les équations trouvées d'aprés ces ſeules *données*, je me ſuis bientôt apperçu qu'elles ne différoient nullement de celles qui appartienent au problême *de chordis vibrantibus*, pourvu qu'on ſuppoſe les mêmes corpuſcules, diſpoſés de la même maniére dans un cas que dans l'autre; d'ou il s'enſuit qu'en augmentant leur nombre à l'infini, & diminuant les maſſes dans la même raiſon, le mouvement d'une fibre ſonore dont les particules élaſtiques ſe touchent mutuellement, doit être comparé à celui d'une corde vibrante correſpondante (*).

Ceci m'a donc conduit à parler des théories, que les grands Géomètres, Mrs. Tailor, D'Alembert, & Euler ont donné ſur ce ſujet. J'expoſe en peu de mots leurs différents, & les objections que M. Daniel Bernoulli a fait aux deux derniers; & aprés avoir ſoigneuſement examiné les raiſons des uns, & des autres, j'en conclus que les calculs, qu'on a fait juſqu'à préſent, ne ſauroient décider de telles queſtions, & que c'eſt néceſſairement à la ſolution générale que nous avons en vue qu'il faut s'en rapporter.

J'entreprens donc cette ſolution dont l'analiſe me paroit en elle même neuve, & intéreſſante, puiſque il y a un nombre indéfini d'équations à réſoudre à la fois. Heureuſement la méthode que j'ai ſuivi m'a mené à des formules qui ne ſont pas fort compoſées, eu égard au grand nom-

---

(*) C'eſt une juſtice que l'on doit ici au Célèbre M. D'Alembert, que de faire remarquer qu'il avoit déja trouvé ce rapport entre les deux problêmes mentionées dans l'art. XLVI. de ſon premier Mémoire ſur les cordes vibrantes dans l'Académie de Berlin. Mais il ne paroit pas, du moins que je ſache, qu'il en ait jamais fait aucun uſage.

Digitized by Google

nombre d' opérations, par où j' ai été obligé de paſſer. Je conſidére d' abord ces formules dans le cas, ou le nombre des corps mobiles eſt fini, & j'en tire aiſément toute la théorie du mélange des vibrations ſimples, & régulières que M. Daniel Bernoulli n'a trouvé que par des voies particuliéres, & indiréctes. Je paſſe enſuite au cas d'un nombre infini de corps mobiles, & après avoir prouvé l' inſuffiſance de la théorie précédente dans ce cas, je tire de mes formules la même conſtruction du problême *de chordis vibrantibus*, que M. Euler a donné, & qui a été ſi fort conteſtée par M. D'Alembert. Je donne de plus à cette conſtruction toute la généralité dont elle eſt capable, & par l'application que j' en fais aux cordes de Muſique, j' obtiens une démonſtration générale, & rigoureuſe de cette importante verité d' expérience, ſavoir: que quelque figure qu' on donne d' abord à la corde la durée de ſes oſcillations ſe trouve néanmoins toujours la même (*).

A cette occaſion je développe la Théorie générale des ſons harmoniques, qui réſultent d' une même corde, de même que celle des inſtrumens à vent. Quoique ces deux théories aient été déja propoſées, l' une par M. Sauveur, & l' autre par M. Euler, cependant je crois être le premier qui les ait immédiatement déduit de l' Analiſe.

Je viens maintenant au principal objet de mes recherches, ſavoir aux loix de la propagation du ſon. Je ſuppoſe qu'une particule d' air reçoive du corps ſonore une impulſion quelcon-

(*) Le ſavant M. D'Alembert cité ci-deſſus dans l' article III. de ſon Addition au mémoire des cordes vibrantes, imprimée dans le tome de l'Académie de Berlin pour l' année 1750., fait à ce propos la remarque ſuivante. *Il eſt vraiſemblable qu'en général quelque figure que la corde prenne, le tems d'une vibration ſera toujours le même, & c' eſt ce que l' expérience paroit confirmer, mais ce qui ſeroit difficile, peut être impoſſible de démontrer en rigueur par le calcul*. Je ne rapporte ces paroles d' un ſi grand Géomètre, que pour donner une idée de la difficulté du problême que j' ai réſolu.

Digitized by Google

conque, je trouve par l' application des mes formules qu' il ſe communique d' une particule à l' autre un mouvement qui n' eſt qu' inſtantané, & qui ne dépend en rien de la force du premier ébranlement. La viteſſe avec laquelle ſe fait cette communication eſt déterminée par la même formule, que M. Newton avoit déja donné pour la viteſſe du Son, & dont les réſultats ſe trouvent aſſés conformes à l' expérience. Le calcul me conduit ici à traiter des échos ſimples, & compoſés, & la théorie que j' établis n' eſt ſujette à aucune des difficultés qui ſe rencontrent dans l' explication, que le Phyſiciens en ont donné juſqu' à préſent. Ces recherches ſont ſuivies d' un examen du mélange des ſons, & de la maniére avec laquelle ils peuvent ſe répandre dans le même eſpace ſans ſe troubler, ou ſe confondre en aucune façon. Je tire enfin de mes formules une explication rigoureuſe, & inconteſtable de la réſonance & du frémiſſement naturel des cordes harmoniques au bruit de la principale; Phénomène connu depuis long-tems, & pour lequel on a inventé pluſieurs ſiſtèmes, ſans être parvenu à en donner une raiſon ſatisfaiſante.

Voila les principaux objets que j'ai traité dans la Diſſértation préſente, & que le défaut de tems, & quelques autres obſtacles imprévus m' ont empêché d' expliquer avec plus d' ordre, & de netteté. Je ſuis bien éloigné de croire qu' elle contienne une théorie complette ſur la nature, & la propagation du ſon; mais ce ſera du moins avoir contribué à l'avancement des Sciences Phyſico-Mathématiques, que d' avoir démontré par le calcul pluſieurs verités qui avoient juſqu' ici paru inexplicables dans la nature; et l'accord de mes réſultats avec l' expérience ſervira peut-être à détruire les préjugés de ceux qui ſemblent déſeſpérer, que les Mathématiques ne puiſſent jamais porter des vrayes lumiéres dans la Phyſique. C' eſt un des principaux buts que je m' étois propoſé pour le préſent.

RE-

SECTION PREMIERE.

Recherches ſur la nature du ſon.

CHAPITRE PREMIER.

Des oſcillations des parties intimes des fluides élaſtiques.

1. J'Entreprens avant tout d'examiner la Théorie, que M. Newton a renfermée dans la ſection VIII. du II. Livre des Principes Mathématiques. Laiſſant a part toute diſcuſſion ſur la formation des ondes, & des fibres ſonores, dont on a parlé dans l'Introduction, je m'attache principalement à l'Analiſe du théorême, dans lequel il prétend établir, que chaque particule d'un fluide élaſtique homogéne ſuit dans ſes mouvemens les mêmes loix, qu'un pendule qui décrit une cicloide dont la longueur égale l'excurſion totale de la particule, & ou la peſanteur qui l'anime eſt équivalente à l'élaſticité naturelle du fluide. Pour démontrer que cette propoſition eſt conforme à la vérité, ſuppoſons d'abord, dit M. Newton, qu'elle le ſoit en effet, & voyons ce qui s'enſuivra. Il cherche donc d'après une pareille ſuppoſition la force accélératrice des particules, & il trouve que cette force eſt préciſément la même, qui fait mouvoir un pendule dans des arcs de la cicloide donnée. Pour faire mieux ſentir l'inexactitude, & l'inſuffiſance du procédé qui l'a conduit à cette concluſion, j'ai cru devoir convertir le théorême en problême, en ſuppoſant d'abord inconnuë, ou indeterminée la loi des mou-

Digitized by Google

vemens qu' on ſe propoſe de trouver. Pour cela il n'y a d' autres changemens à faire aux propoſitions de M. Newton, que de ſubſtituer au lieu du cercle dont les arcs expriment les tems, & les coupées les eſpaces parcourus, une autre courbe quelconque qui faſſe la même fonction.

Je rapporterai donc ici la propoſition dont il s' agit, & j' aurai ſoin de me ſervir des mêmes expreſſions de l' Auteur autant qu' il me ſera poſſible.

Propoſitio XLVII. LIB. II. Problema.

2. Pulſibus per fluidum elaſticum propagatis invenire legem, qua ſingulae fluidi particulae motu reciproco breviſſimo euntes, & redeuntes accelerantur, & retardantur.

Deſignent (Fig. 1.) *AB*, *BC*, *CD* &c. *pulſuum ſucceſſivorum aequales diſtantias*, *ABC plagam motus pulſuum ab A verſus B propagati*; *E*, *F*, *G puncta tria phyſica medii quieſcentis in recta AC ad aequales ab invicem diſtantias ſita*; *Ee*, *Ff*, *Gg ſpatia aequalia perbrevia*, *per quae puncta illo motu reciproco ſingulis vibrationibus eunt*, *& redeunt*; *ε*, *φ*, *γ loca quaevis intermedia eorundem punctorum*; *& EF*, *FG lineolas phyſicas*, *ſeu Medii partes lineares punctis illis interjectas*, *& ſucceſſive translatas in loca εφ*, *φγ*, *& ef*, *fg*. *Rectae Ee aequalis ducatur recta PS*; Et ſuper ipſa deſcribatur curva in ſe rediens *PHShP*. (Fig. 2.) *Per hujus* peripheriam *totam cum partibus ſuis exponatur tempus totum vibrationis unius*, *cum ipſius partibus proportionalibus*, *ſic ut completo tempore quovis PH*, *vel PHSh*, *ſi demittatur ad PS perpendiculum HL*, *vel hl*, *& capiatur Eε aequalis PL vel Pl*, *punctum phyſicum E reperietur in ε*; *hac lege punctum quodvis E eundo ab E per ε ad e*, *& inde redeundo per ε ad E vibrationes ſingulas peraget*, prout fert natura curvae propoſitae *PHShP*; invenienda eſt hujuſmodi curva. *In* peripheria *PHSh capiantur aequales arcus HI*, *IK*, *vel hi*,

Digitized by Google

i k eam habent rationem ad peripheriam *totam, quam habent aequales rectae E F, F G ad pulſuum intervallum totum B C, & demiſſis perpendiculis I M, K N, vel i m, k n, quoniam puncta E, F, G motibus ſimilibus ſucceſſive agitantur, & vibrationes ſuas integras ex itu, & reditu compoſitas interea peragunt dum pulſus transfertur a B ad C, ſi P H, vel P H S h ſit tempus ab initio motus puncti E erit P I, vel P H S i tempus ab initio motus puncti G, & propterea E ε, F φ, G γ erunt ipſis P L, P M, P N in itu punctorum, vel ipſis P l, P m, P n in punctorum reditu, aequales reſpective. Unde ε γ ſeu E G + G γ — E ε in itu punctorum aequalis erit E G — L N in reditu autem aequalis E G + l n; ſed ε γ latitudo eſt, ſeu expanſio partis Medii E G in loco ε γ; & propterea expanſio partis illius in itu eſt ad ejus expanſionem mediocrem, ut E G — L N ad E G, in reditu autem ut E G + l n, ſeu E G + L N ad E G . . . .*

Unde vis elaſtica puncti F in loco ε γ eſt ad ejus vim elaſticam mediocrem in loco E G ut $\frac{1}{EG - LN}$ *ad* $\frac{1}{EG}$ *in itu; in reditu vero ut* $\frac{1}{EG + ln}$ *ad* $\frac{1}{EG}$; *& eodem argumento vires elaſticae punctorum phyſicorum E, & G in itu ſunt ut* $\frac{1}{EG - MR}$ *&* $\frac{1}{EG - QM}$ *ad* $\frac{1}{EG}$ (ductis ſcilicet (Fig. 3.) perpendiculis *D R*, F *Q*, quae intercipiant partes arcus *F H*, *K D* aequales ipſis *H I*, *I K*), *& virium differentia ad medii vim elaſticam mediocrem, ut* $\frac{QM - MR}{(EG - MR) \times (EG - QM)}$ *ad* $\frac{1}{EG}$; *hoc eſt ut* $\frac{QM - MR}{EG^2}$ *ad* $\frac{1}{EG}$ *ſive ut Q M — M R ad E G, ſi modo (ob anguſtos vibrationum limites) ſupponamus M R, Q M indefinite minores eſſe quantitate E G; quare cum quantitas E G detur, differentia virium eſt, ut*

 R M

Digitized by Google

QM — MR. Sed differentia illa (ideſt exceſſus vis elaſticae puncti ε ſupra vim elaſticam puncti γ) eſt vis qua interjecta Medii lineola phyſica εγ acceleratur, & propterea vis acceleratrix lineolae phyſicae εγ eſt, ut differentia linearum *QM*, & *MR*; igitur ex Mechanicae principiis differentia iſta eſſe debebit, ut fluxio ſecunda ſpatii quod deſcribitur a particula *εγ*, poſita ſcilicet fluxione prima temporis conſtante. Jam vero quoniam ex hypoteſi tempora exprimuntur per arcus, & ſpatia per abſciſſas reſpondentes erunt *MR*, & *QM* fluxiones primae ſpatiorum *PR*, *PQ*, adeoque *QM — MR* aequabitur fluxioni ſecundae ſpatii *PR*, vel etiam *PM*, quod ab illo infinite parum differt; quum itaque partes arcus *DI*, *IF* aequentur inter ſe habebimus ad determinandam curvam *PHSh* ſequentem aequationem identicam $QM - MR = QM - MR$, ſeu $o = o$ quod nihil indicat.

3. Cette concluſion vague, & indéterminée, que nous venons de trouver, nous apprend donc clairement la raiſon pour laquelle les principes de M. Nevvton peuvent nous conduire également à des réſultats très différens entr'eux, comme M. Cramer l'a ingénieuſement démontré dans l'hypothéſe, que les particules élaſtiques ſuivent dans leurs mouvemens la même loix, que les corps peſans qui montent, ou qui deſcendent alternativement. Mais ſuivons encore la théorie de M. Newton, & paſſons à la propoſition 49. dans laquelle il détermine le tems que chaque particule doit employer à faire une oſcillation entière. Or comme de la propoſition précédente il réſulte que toute courbe rentrente *PHShP* peut également exprimer la rélation entre les eſpaces, & les tems, l'on ſera auſſi bien en droit de ſubſtituer au cercle dans cette propoſition une courbe quelconque, & d'y appliquer généralement les mêmes raiſonnemens que M. Newton a fait ſur ſon hypothéſe particulière. Soit donc

PRO-

Digitized by Google

Propoſitio XLIX. *Problema*.

4. *Datis Medii denſitate, & vi Elaſtica invenire velocitatem pulſuum.*

Fingamus Medium ab incumbente pondere pro more aëris noſtri comprimi, ſitque A altitudo Medii homogenei, cujus pondus adaequet pondus incumbens, & cujus denſitas eadem ſit cum denſitate Medii compreſſi, in quo pulſus propagantur. Conſtitui autem intelligatur pendulum, cujus longitudo inter punctum ſuſpenſionis, & centrum oſcillationis ſit A, & quo tempore pendulum illud oſcillationem integram ex itu, & reditu compoſitam peragit, eodem pulſus eundo conficiet ſpatium circumferentiae circuli radio A deſcripti aequale. Nam ſtantibus, quae in Prop. 47. *conſtructa ſunt, ſi lineola quaevis phyſica EF ſingulis vibrationibus deſcribendo ſpatium PS urgeatur in* loco quovis $\epsilon\phi$ *a vi Elaſtica, quae* eadem omnino ſit, quam propoſita ſpatiorum, & temporum ſcala *PHShP* requirit ſeu $= \frac{QM - MR}{HK^2} \times M$, denotante *M* maſſam, ſeu pondus lineolae phyſicae *EG*, peraget haec vibrationes ſingulas tempore *PHS*, & oſcillationes integras tempore *PHShP*; *id adeo, quia vires aequales aequalia corpuſcula per aequalia ſpatia ſimul impellent* . . . .

Sed vis elaſtica, qua lineola phyſica EG in loco quovis $\epsilon\gamma$ *exiſtens urgetur erat (in demonſtratione* Prop. 47.) *ad ejus vim totam elaſticam, ut. QM — MR ad EG; & vis illa tota, hoc eſt pondus incumbens, quo lineola EG comprimitur eſt ad pondus lineolae, ut ponderis incumbentis altitudo A ad lineolae longitudinem EG, adeoque ex aequo vis, qua lineola EG* in loco quovis $\epsilon\gamma$ *urgetur, eſt ad lineolae illius pondus, ut* $(QM - MR)A$ *ad* EG^2 hinc vis iſta erit ad vim ſuperius inventam $\frac{QM - MR}{HK^2} \times M$, ut

A

$\frac{A}{EG^2}$ ad $\frac{1}{HK^2}$. Porro $HK = 2\,KI$ & $EG = 2\,EF$; unde quum ex conſtructione propoſitionis antecedentis habeatur $KI : EF = PHShP : BC$ erit etiam $HK : EG = PHShP : BC$ unde proportio virium ſupra inventa tranſmutabitur in hanc $\frac{A}{BC^2} : \frac{1}{[PHShP]^2}$. *Quare cum tempora, quibus aequalia corpora per aequalia ſpatia impelluntur ſint reciproce in ſubduplicata ratione virium, erit tempus vibrationis unius urgente vi illa elaſtica, ad tempus* $PHShP$ *in ſubduplicata ratione* $\frac{BC^2}{A} : (PHShP)^2$, ſeu ut $\frac{BC}{\sqrt{A}} : PHShP$. Quum itaque conſequentia in hac analogia eadem ſint, aequalia eſſe debebunt & antecedentia; hinc orietur tempus vibrationis unius lineolae EG urgente vi elaſtica $= \frac{BC}{\sqrt{A}}$. *Sed tempore vibrationis unius, ex itu & reditu compoſitae pulſus progrediendo conficit latitudinem ſuam* BC; *ergo tempus, quo pulſus percurrit ſpatium* BC erit $= \frac{BC}{\sqrt{A}}$. *Tempus autem, quo pulſus percurrit ſpatium* BC *eſt ad tempus, quo percurret longitudinem circumferentiae* circuli, cujus radius eſt A *aequalem in eadem ratione*, ſcilicet, ut $BC : \pi A$ (poſita ſcilicet pro π ratione circumpherentiae ad radium) adeoque erit hoc tempus $= \frac{\pi A}{\sqrt{A}} = \pi \sqrt{A}$; ſed ex theoria pendulorum reperitur etiam tempus oſcillationis unius penduli longitudinis $A = \pi \sqrt{A}$; *ideoque tempore talis oſcillationis pulſus percurret longitudinem huic circumferentiae aequalem.*

5. Voila donc un nouveau paradoxe déduit des Principes de Mr. Newton, ſavoir que quelle que ſoit la loi des mouvemens des particules élaſtiques le tems des oſcil-

lations

lations eſt néanmoins toujours le méme. Ces deux propoſitions que nous venons de détailler, contiennent toute la théorie que cet Auteur a donné concernant les mouvemens de l'air qui font l'objet principal de la Diſſertation préſente, c'eſt pourquoi nous les examinerons ici avec tout le ſoin poſſible. Pour peu qu'on reflêchiſſe ſur la nature des démonſtrations précédentes, on s'apperçevra ſans peine que les défauts de cette théorie dépendent moins de l'enchainement des raiſonnemens que des Principes, & des *donnéès* que l'Auteur adopte tacitement pour la ſolution du problême. Ces *données* étant développées ſe réduiſent aux ſuivantes. 1.mo Que les mouvemens de toutes les particules ſoient exprimés par le même lieu géométrique, d'où il ſuit qu'il doivent être tous d'une même nature. 2.do Que ces particules ſe communiquent le mouvement dans des tems égaux, enſorte qu'elles viennent toutes à paſſer ſucceſſivement par les mêmes dégrés de mouvement. Il eſt conſtant qu'on ne peut admetre aucune de ces ſuppoſitions, ſi on n'a auparavant démontré qu'elles ſont des conſéquences néceſſaires des conditions données du problême. Or tant s'en faut que dans notre cas la choſe ſoit ainſi, qu'au contraire ce ſont ces mêmes conditions qui détruiſent entiérement celles qui dépendent de l'action mutuelle, que les parties exercent en vertu de leurs forces répulſives. Pour développer cette difficulté dans toute ſon étendue, ainſi que l'importance de la matiére, & l'autorité du grand Homme, dont les égaremens mêmes nous ſont inſtructifs, ſemblent l'exiger, je vais donner l'Analiſe pure & exacte du problême, dont il s'agit telle, que peuvent la fournir les premiers Principes de Mécanique.

6. Soient ſelon les premiéres ſuppoſitions de Mr. Newton (Fig. 1.) *E*, *F*, *G &c.* des Points Phyſiques qui compoſent le milieu élaſtique, lorſqu'il eſt en repos; ſoient

enſuite

enſuite parvenus ces mêmes points en ε, φ, γ, de ſorte qu'il reſtent néanmoins dans la même ligne droite BC; qu'on dénote les eſpaces rectilignes parcourus $E\varepsilon$, $F\varphi$, & $G\gamma$ par y^{I}, y^{II}, y^{III}, & ſuppoſant que la premiére diſtance EF, FG entre ces points ſoit $= r$, l'on aura $\varepsilon\varphi = r + y^{\text{II}} - y^{\text{I}}$; $\varphi\gamma = r + y^{\text{III}} - y^{\text{II}}$; or la force d'élaſticité naturelle qui agit entre les points E, F, G eſt exprimée par $\frac{A \times M}{r}$, comme il eſt démontré dans la *Prop.* 49. ci-deſſus, où M dénote le poid de chaque particule, & A eſt la hauteur d'une colomne homogéne du même fluide, dont la peſanteur égale le reſſort naturel des particules; donc lorſque les points E, F, G viennent a être tranſportés en ε, φ, γ cette force d'élaſticité ſe changera en $\frac{A \times M}{\varepsilon\varphi} = \frac{A \times M}{r + y^{\text{II}} - y^{\text{I}}}$ pour les points ε & φ, & en $\frac{A \times M}{\varphi\gamma} = \frac{A \times M}{r + y^{\text{III}} - y^{\text{II}}}$ pour les points φ & γ, & ainſi de ſuite; par conſéquent la différence de ces deux forces donnera la force motrice de la particule intermédiaire φ, laquelle ſe trouvera $= AM \times \left(\frac{1}{r + y^{\text{II}} - y^{\text{I}}} - \frac{1}{r + y^{\text{III}} - y^{\text{II}}}\right)$, c'eſt à dire $= AM \times \frac{y^{\text{III}} - 2y^{\text{II}} + y^{\text{I}}}{(r + y^{\text{II}} - y^{\text{I}})(r + y^{\text{III}} - y^{\text{II}})}$. Mais, comme les particules ſont ſuppoſées devoir faire des excurſions aſſés petites, les différences $y^{\text{II}} - y^{\text{I}}$, & $y^{\text{III}} - y^{\text{II}}$ des eſpàces parcourus s'évanouiront auprés de la quantité r, d'où il réſulte pour la force motrice de la particule F, $AM \times \frac{y^{\text{III}} - 2y^{\text{II}} + y^{\text{I}}}{r^2}$, qui eſt celle qui fait parcourrir l'eſpace y^{II}. De la même maniére on trouvera pour les autres particules des expreſſions des forces motrices toutes ſemblables à celle-ci; d'où ſi l'on nomme t le tems écoulé depuis le commencement

cement du mouvement de la particule E, & ſi l'on fait ſes différences dt conſtantes on obtiendra par les Principes de la Mécanique l'équation ſuivante qui contient les loix du mouvement de la particule F, ſavoir

$\frac{d^2 y^{II}}{dt^2} = \frac{2Ah}{T^2} \times \frac{y^{III} - 2y^{II} + y^{I}}{r^2}$, où h eſt l'eſpace qu'un corps peſant parcourt librement en tombant durant le tems T; de même on aura pour la particule ſuivante G l'équation

$\frac{d^2 y^{III}}{dt^2} = \frac{2Ah}{T^2} \times \frac{y^{IV} - 2y^{III} + y^{II}}{r^2}$, & ainſi des autres.

En général, ſi l'expoſant de y exprime toujours la place que tient la particule qui parcourt l'eſpace y, en comptant depuis la premiére F, on trouvera pour le mouvement de la particule, dont le quantiéme du rang eſt m, l'équation générale $\frac{d^2 y^m}{dt^2} = \frac{2Ah}{T^2} \times \frac{y^{m+1} - 2y^m + y^{m-1}}{r^2}$. Ces équations, comme il eſt aiſé de le voir, ſont en même nombre que les particules mobiles, dont on cherche les mouvemens; c'eſt pourquoi le problême étant déja abſolument déterminé par leur moyen, on eſt obligé de s'en tenir là, de ſorte, que toute condition étrangére qu'on voudra introduire, ne peut pas manquer de rendre la ſolution inſuffiſante, & même fautive. Mais pour connoître diſtinctément quelle atteinte doivent porter à l'Analiſe ci-deſſus expliquée les hypothéſes particuliéres que Mr. Newton a imaginées, pour faciliter peut être le problême qui de ſa propre nature eſt très-compliqué, nous allons réduire ces hypothéſes en formules.

7. Pour cela nous commencerons par remarquer que ſi t eſt le tems écoulé depuis le commencement du mouvement de la particule E, il faudra en vertu de la ſeconde hypothèſe qu'il ſe ſoit écoulé un tems $t + dt$, afin que la particule ſuivante F ait pû ſe mouvoir durant

un tems t; il faudra auſſi un tems $t + 2\,dt$ pour un mouvement ſemblable de la particule ſuivante G, & ainſi pour les autres; d'où il s'enſuit que, puiſque toutes les particules ſont ſuppoſées ſuivre les mêmes loix par l'hypothèſe première, l'eſpace parcouru par le point F, durant le tems t, ſera égal à l'eſpace parcouru par la particule G pendant le tems $t + dt$, & que l'eſpace parcouru par le point E pendant le tems t ſera le même que l'eſpace parcouru par la particule G dans le tems $t + 2\,dt$; or y^{I}, y^{II}, y^{III} expriment les eſpaces parcourus par les particules E, F, G, *&c.* dans le même tems t, on aura donc $y^{\text{II}} = y^{\text{III}} + dy^{\text{III}}$; $y^{\text{I}} = y^{\text{III}} + 2\,dy^{\text{II}} + d^2y^{\text{I}}$; maintenant ſi l'on ſubſtitue ces valeurs de y^{I} & de y^{II}, dans l'expreſſion $y^{\text{III}} - 2\,y^{\text{II}} + y^{\text{I}}$, l'équation qui contient le mouvement de la particule F ſe changera en celle-ci $\frac{d^2y^{\text{II}}}{dt^2} = \frac{2\,Ah}{T^2} \times \frac{d^2y^{\text{III}}}{r^2}$; mais $y^{\text{II}} = y^{\text{III}} + dy^{\text{III}}$, & par conſéquent $d^2y^{\text{II}} = d^2y^{\text{III}} + d^3y^{\text{III}}$, l'on aura donc l'équation $\frac{d^2y^{\text{III}} + d^3y^{\text{III}}}{dt^2} = \frac{2\,Ah}{T^2} \times \frac{d^2y^{\text{III}}}{r^2}$, ou bien en négligeant le terme d^3y^{III}, & diviſant tout par d^2y^{III} nous aurons $\frac{1}{dt^2} = \frac{2\,Ah}{T^2r^2}$, équation, qui comme on voit, ne contient plus aucune des variables y^{I}, y^{II}, y^{III} *&c.* On trouvera par des raiſonnemens ſemblables que toutes les autres équations ſe réduiront encore à celle-ci, laquelle par conſéquent pourra être vraie quelles que ſoient les valeurs des y, pourvu que l'on ait $dt^2 = \frac{T^2r^2}{2\,Ab}$. Maintenant ſi l'on nomme θ le tems d'une oſcillation entiére, on aura $\theta = PHShP$ & $dt = KI$; par conſéquent $dt : EF = \theta : BC$; par la *Prop.* 49., ſavoir $dt = \frac{r\,\theta}{BC}$ & $dt^2 = \frac{r^2\,\theta^2}{BC^2} = \frac{T^2r^2}{2\,Ab}$; d'où l'on tire

$\theta^2 =$

$\theta^2 = \frac{BC^2 \times T^2}{2Ab}$ & $\theta = \frac{T \times BC}{\sqrt{2Ab}}$ qui eſt la même ex- se réduit à /
preſſion que nous avons déja trouvé pour la meſure du tems dans la *Prop.* 49. voy. l'Errata, à la fin du vol.

Tout ce que nous venons de démontrer ſuffit aſſés, ce me ſemble, pour faire connoître à fond l'inſuffiſance & la fauſſeté de la méthode de Mr. Newton. Nous allons donc chercher une autre voie qui nous mène à une ſolution du problême, dont il s'agit fondée ſur des Principes ſurs & inconteſtables.

8. Pour enviſager d'abord la queſtion ſous le point de vue le plus ſimple & le plus général qu'il ſoit poſſible, je regarde avec Mr. Newton les fluides élaſtiques comme des amas de corpuſcules, qui ſe fujent mutuellement ſelon les loix connues de l'élaſticité. Imaginons donc une ſuite de corps qui ayent tous la même maſſe, & qui ſoient rangés ſur une même ligne droite, à diſtances égales les uns des autres; ſuppoſons de plus que ces corps ſe répouſent mutuellement par des forces élaſtiques qui ſuivent la raiſon inverſe des diſtances; & pour contenir l'action continuelle de ces forces de répulſion, qui tendent ſans ceſſe à écarter les corps les uns des autres, qu'on conſidére les deux extrèmes comme fixes & immobiles, en ſorte que quelque mouvement qu'on excite dans leur ſiſtème, il demeure toujours renfermé entre les deux limites données. Maintenant ſoit le nombre des corps mobiles $= m - 1$, leur maſſe $= M$, la force du reſſort naturel $= E$, en conſervant les autres ſuppoſitions ci-deſſus (art. 6.), on trouvera que les mouvemens de tout le ſiſtème ſeront contenus dans les équations ſuivantes;

$$\frac{d^2 y^{\mathrm{I}}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{y^{\mathrm{II}} - 2y^{\mathrm{I}}}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{\mathrm{II}}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{y^{\mathrm{III}} - 2y^{\mathrm{II}} + y^{\mathrm{I}}}{r}$$

Digitized by Google

$$\frac{d^2 y^{III}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{y^{IV} - 2y^{III} + y^{II}}{r}$$

Ces équations ſeront au nombre de $m - 1$, ſavoir en même nombre que les corps mobiles, & de plus toutes ſemblables, excepté la premiére & la derniére, dans leſquelles les quantités y^{0} & y^{m}, qui repréſenteroient ſelon l'ordre établi les eſpaces parcourus par le premier & dernier corps, doivent être à cauſe de l'immobilité de ces corps, ſuppoſées égales, à zero; la derniére de ces équations ſe trouvera donc

$$\frac{d^2 y^{m-1}}{dt^2} = \frac{2Eh}{MT^2} \times \frac{-2y^{m-1} + y^{m-2}}{r}.$$

C'eſt en intégrant toutes ces équations, & en tirant des valeurs pour chaque inconnue y^{I}, y^{II}, y^{III} *&c.* exprimées par la même variable t que l'on parviendra à déterminer les mouvemens de tous les corps qui compoſent le ſiſtème propoſé; mais avant que d'entrer dans ces recherches, il eſt néceſſaire de traiter des cauſes qui peuvent produire de tels ébranlemens dans les parties intimes des fluides élaſtiques. Nous nous bornerons ici aux cordes vibrantes, dont les mouvemens ſont plus connus, & qui, peut être, ſont les ſeuls de cette eſpèce qui ne ſe refuſent pas à l'Analiſe.

Digitized by Google

CHAPITRE II.

Des vibrations des cordes.

9. SOIT *AB* (Fig. 4.) une corde tant ſoit peu extenſible, & qu'on puiſſe conſiderer abſtraction faite de ſa gravité, & de ſa roideur ; ſuppoſons qu'elle ſoit attachée fixément aux deux points immobiles *A*, & *B* qui la tiennent tendue avec une force égale au poid *P*. Soit de plus cette corde chargée de tant de corpuſcules *E*, *F*, *G* &c. qu'on voudra, qui aient tous la même maſſe *M*, & qui ſoient éloignés les uns des autres, par des intervalles égaux *AE*, *EF &c.* Il eſt évident par les Principes de la Mécanique que, ſi les points *E*, *F*, *G &c.* viennent à être écartés de la ligne droite, enſorte qu'ils décrivent les lignes infiniment petites *Ee*, *Ff*, *Gg &c.* chacun de ſes points *f* ſera pouſſé vers *F* par une force égale à $P \times$ ſin: *efg*. Or ſi l' on nomme y^{I}, y^{II} *&c.*: les excurſions *Ee*, *Ff &c.* des corps *E*, *F*, & qu'on faſſe l'intervalle conſtant $AE = EF = r$ on aura ſin: $efg = -\frac{y^{\text{III}} - 2y^{\text{II}} + y^{\text{I}}}{r}$; d'ou l'on tire pour le mouvement du corps *F* l' équation $\frac{d^2 y^{\text{II}}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{\text{III}} - 2y^{\text{II}} + y^{\text{I}}}{r}$ on trouvera de même pour le mouvement du corps ſuivant *G*, l'équation $\frac{d^2 y^{\text{III}}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{\text{IV}} - 2y^{\text{III}} + y^{\text{II}}}{r}$, & ainſi pour les autres. Par conſéquent ſi les corps attachés à la corde ſont au nombre de $m - 1$ on aura en général pour leurs mouvemens, quels qu'ils ſoient, les équations ſuivantes.

$$\frac{d^2 y^{\text{I}}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{\text{II}} - 2y^{\text{I}}}{r}$$

$$\frac{d^2 y^{\text{II}}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{\text{III}} - 2y^{\text{II}} + y^{\text{I}}}{r}$$

Digitized by Google

$$\frac{d^2 y^{II}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{y^{IV} - 2y^{III} + y^{II}}{r}$$

&c.

Dont le nombre ſera encore $m - 1$, & la derniére ſera exprimée par $\frac{d^2 y^{m-1}}{dt^2} = \frac{2Ph}{MT^2} \times \frac{-2y^{m-1} + y^{m-2}}{r}$.

Il eſt viſible que toutes ces équation ſont entiérement ſemblables à celles que nous avons trouvées pour les mouvemens des corps élaſtiques, & qu'il n'y a qu'à faire $P = E$, pour qu'elles deviennent tout-à-fait les mêmes; d'où il s'enſuit que les deux problêmes qui y répondent ſont de même nature, & qu'en en reſolvant un, on reſout l'autre en même tems.

10. Imaginons que le nombre des corps dans l'un & dans l'autre cas augmente à l'infini, & que leurs maſſes diminuent en même raiſon, les globules rangés en ligne droite formeront des fibres élaſtiques, telles qu'on peut les conçevoir dans l'air commun, & la corde tendue deviendra une corde uniformément épaiſſe dans toute ſa longueur, comme le ſont les cordes de Muſique; le même rapport ſubſiſtera donc encore entre les oſcillations des parties de l'une & de l'autre, par conſéquent la théorie des mouvemens des cordes étant connue, l'on pourra par une ſimple application en déduire celle des mouvemens de l'air qui produiſent le ſon. Ces deux problêmes ſont donc liés entr'eux, non ſeulement par leur nature même, mais encore par les Principes, d'où dépandent leurs ſolutions. Comme la matiére des vibrations des cordes a déja été traité par des grands Géométres, il ſera a propos de rappeller ici en peu de mots les principales méthodes qu'ils ont imaginé pour cela. J'entrerai dans ce détail d'autant plus volontier, que ces Auteurs ſont peu d'accord ſur les Principes, & dans les réſultats,

ce

Digitized by Google

ce qui pourroit faire douter de la généralité, & de la rigueur de leurs ſolutions.

11. Le premier qui ait tenté de ſoumettre au calcul le mouvement des cordes vibrantes eſt le célébre Mr. Tailor dans ſon excellent ouvrage *de Methodo Incrementorum*.

Il ſuppoſe d'abord, & il prétend même le démontrer que la chorde doit toujours prendre des figures telles, que tous ſes points arrivent en même tems à la ſituation rectiligne; d'où il déduit que ces figures ne peuvent être que celles d'une eſpèce de cicloides allongées, qu'il nomme *compagnes de la cicloide*. Voici ſon procédé.

Nommant x une abſciſſe quelconque (Fig. 5.) AE, & y l'ordonnée Ee qui dénote la diſtance du point E de la corde à l'axe dans un tems quelconque t, on démontrera par le même raiſonnement de l'art. 9., que la force accélératrice du point e vers E eſt exprimée par $-\frac{P}{M} \times \frac{d^2y}{dx}$. Soit a la longueur de toute la corde, & S ſon poid total on aura $M = \frac{S\,dx}{a}$; & par conſéquent la force accélératrice en e deviendra $= -\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2}$. Or afin que toute la corde puiſſe reprendre ſa ſituation rectiligne, l'Auteur ſuppoſe cette force proportionelle à la diſtance Ee, que le point e doit parcourir; ainſi en faiſant K égale à une ligne quelconque il obtient l'équation $-\frac{aP}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{K}$; d'où en faiſant $\frac{S}{aPK} = f$, il réſulte par les méthodes connues $x\sqrt{f} =$ Arc. ſin. $(\frac{y}{Y})$; & $y = Y$ ſin: $(x\sqrt{f})$, équation de la courbe pour un tems quelconque t, où l'ordonnée Y eſt la plus grande. Or comme le point e en parcourant l'eſpace eE eſt continuellement pouſſé par une force accélératrice proportionelle

Digitized by Google

nelle à l'eſpace qui reſte à parcourir, l'on aura $-\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{2h}{T^2} \times \frac{y}{K}$, d'où ſi l'on fait encore pour abréger $\frac{2h}{T^2K} = g$, l'on tirera de nouveau $t\sqrt{g} =$ Arc. ſin. $(\frac{y}{Y^1})$, & $y = Y^1$ ſin. $(t\sqrt{g})$. Equation qui donne pour un tems quelconque t le rapport de l'éloignement y du point e de l'axe, à ſon plus grand éloignement Y^1, donc ſi l'on met au lieu de Y^1 la valeur de y qui convient à la courbe la plus grande AeB, & que avons trouvé plus haut Y ſin. $(x\sqrt{f})$, il en réſultera l'expreſſion générale des y pour tous les tems t, & pour chaque coupée x, ſavoir $y = Y.$ ſin. $(x\sqrt{f}) \times$ ſin. $(t\sqrt{g})$; & telle eſt l'équation de la corde vibrante dans l'hypotèſe de Mr. Tailor, en ſuppoſant qu'elle ſoit en ligne droite au commencement de ſon mouvement.

Si la corde eut d'abord eu la figure d'une trochoide allongée, allors, puiſque t croiſſant, y diminueroit, on auroit trouvé $y = Y.$ ſin. $(x\sqrt{f}) \times$ coſ. $(t\sqrt{g})$, ou $y = Y$ ſin. $(x\sqrt{f})$ exprimeroit la figure de la corde au commencement.

Pour déterminer la conſtante K qui entre dans les quantités f & g, on remarquera que y doit être $= 0$, ſoit qu'x ſoit $= 0$, ſoit qu'x ſoit $= a$, quelle que ſoit la valeur de t. Or en poſant $x = 0$, on a d'abord $y = 0$, parceque ſin. $0 = 0$. Qu'on faſſe donc $x = a$, & ſin. $(a\sqrt{f}) = 0$; ſi $1 : \pi$ eſt la raiſon du rayon du cercle à la circonférence, l'on ſait que ſin. $\frac{s\pi}{2} = 0$, prénant pour s un nombre quelconque entier, c'eſt pourquoi l'on aura $a\sqrt{f} = \frac{s\pi}{2}$, & $\sqrt{f} = \frac{s\pi}{2a}$; or $\sqrt{f} = \sqrt{\frac{S}{aPK}}$, ce qui

donne

donne $\frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{s\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{Sa}}$; & par conſéquent $\sqrt{g} = \frac{1}{T}$ $\sqrt{\frac{2h}{K}} = \frac{s\pi}{2T} \sqrt{\frac{2hP}{Sa}}$.

12. Cette ſolution que nous venons d'expliquer, outre qu'elle porte ſur l'hypothèſe entiérement gratuite, que tous les points de la corde s'étendent en même tems en ligne droite, eſt encore bien éloignée d'être générale, même dans cette hypothèſe, puiſqu'il faudroit encore démontrer que c'eſt dans le ſeul cas des forces accélératrices proportionelles aux diſtances des points de la corde à l'axe, que tous ſes points peuvent toucher l'axe dans le même inſtant. C'eſt pour ſuppléer à ce défaut, que le célébre Mr. D'Alembert a imaginé une autre méthode de réſoudre le problême *de chordis vibrantibus* pris dans le ſens le plus général qu'il ſoit poſſible. Cette méthode qui eſt sûrement une des plus ingénieuſes, qu'on ait tiré juſqu'ici de l'Analiſe, ſe trouve détaillée dans deux Mémoires que l'Auteur a donné dans le Tôme de l'Académie Royale de Pruſſe, dont nous avons fait mention ci-devant. Je ne rapporterai ici que les Principes, ſur leſquels elle eſt appuyée, & les conſéquences qui en réſultent pour la théorie en queſtion.

L'on a vu (art. 11.) que la force accélératrice du point E en e eſt exprimée généralement par $-\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2}$, quelle que ſoit la courbe de la corde tendue AeB; donc puiſque cette force tend à faire parcourir au point E l'eſpace $eE = y$, elle devra être égale à $-\frac{T^2}{2h} \times \frac{d^2y}{dt^2}$, l'on aura donc pour l'équation générale de la courbe dans un tems quelconque t, $\frac{Pa}{S} \times \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{T^2}{2h} \times \frac{d^2y}{dt^2}$. Il faut d'abord remarquer dans cette équation que la différentielle d^2y du

premier membre doit être priſe en regardant l'x ſeule comme variable, au lieu que dans la différentielle d^2y du ſecond membre c'eſt le ſeul tems t qui doit varier. Les Géométres ont coutume de mettre de telles expreſſions entre deux parenthèſes de la maniére ſuivante $(\frac{d^2y}{dx^2})$, $(\frac{d^2y}{dt^2})$ afin que l'on puiſſe juger par la ſimple inſpection, laquelle des variables x, ou t doit être changeante dans la différentiation de y. Soit pour abréger $\frac{2Pah}{ST^2} = c$, & on aura à intégrer l'équation $(\frac{d^2y}{dt^2}) = c\ (\frac{d^2y}{dx^2})$. Or Mr. D'Alembert trouve par une Analiſe neuve & ingénieuſe, que l'équation finie qui répond à celle-ci eſt $y = \Psi.\ (t\sqrt{c} + x) + \Gamma.\ (t\sqrt{c} - x)$, Ψ & Γ exprimant des fonctions quelconques des quantités $t\sqrt{c} + x$, & $t\sqrt{c} - x$. Voila donc quelle ſera l'équation générale de la courbe, que peut former une corde tendue. A l'égard de la nature des fonctions exprimées par Ψ & par Γ, elles ſont en elles mêmes indéterminées; mais puiſque les deux bouts de la corde ſont ſuppoſés fixes, il eſt évident qu'elles doivent ſatisfaire à ces deux conditions, ſavoir que y ſoit $= 0$, lorſque $x = 0$, & lorſque $x = a$ quel que ſoit le tems t; l'on aura par là les deux équations $\Psi\ (t\sqrt{c}) + \Gamma\ (t\sqrt{c}) = 0$, & $\Psi\ (t\sqrt{c} + a) + \Gamma\ (t\sqrt{c} - a) = 0$; il réſulte de la premiére $\Gamma = -\Psi$, & ainſi la ſeconde ſe change en $\Psi\ (t\sqrt{c} + a) - \Psi\ (t\sqrt{c} - a) = 0$, laquelle doit être vérifiée par la nature même de la fonction Ψ. Suppoſant donc une fonction quelconque Ψ qui ſoit telle, que $\Psi\ (t\sqrt{c} + a) = \Psi\ (t\sqrt{c} - a)$, quelle que ſoit la valeur de t, on aura généralement pour la corde tendue l'équation $y = \Psi\ (t\sqrt{c} + x) - \Psi\ (t\sqrt{c} - x)$. L'on ſait, que toute fonction peut être repréſentée par l'ordonnée

d'une

d'une courbe, dont l'abſciſſe ſoit la variable contenue dans la fonction propoſée; donc ſi l'on décrit une courbe quelconque qui ait des ordonnées égales ~~à~~ toutes les abſciſſes exprimées par $t\sqrt{c} + a$, & $t\sqrt{c} - a$, cette courbe donnera une conſtruction fort ſimple de l'équation propoſée, car on n'aura qu'à prendre les ordonnées qui répondent aux abſciſſes $t\sqrt{c} + x$, & $t\sqrt{c} - x$, dont la différence donnera l'ordonnée de la courbe, que forme la corde ſonore dans un tems quelconque t. Or puiſque la fonction Ψ doit reſter la même, ſoit qu'on ajoute, ou qu'on retranche de la changeante $t\sqrt{c}$ la quantité a, ſi l'on ſuppoſe dans l'équation générale $y = \Psi\,(t\sqrt{c} + x) - \Psi\,(t\sqrt{c} - x)$, que le tems t ſoit augmenté de la quantité $\frac{2a}{\sqrt{c}}$ la valeur de y n'en ſera en rien dérangée, & ainſi la corde au bout d'un tems $= \frac{2a}{\sqrt{c}} = T\sqrt{\frac{Sa}{2Ph}}$ reprendra toujours la figure qu'elle avoit au commencement de ce tems; ~~c'eſt pourquoi~~ ſi la corde dans ſes mouvemens ſe trouve une fois étendue en ligne droite, elle reviendra en cette ſituation après chaque tems t, qui contiendra un certain nombre de fois exactement le tems $T\sqrt{\frac{Sa}{2Ph}}$; l'on a donc une infinité d'autres courbes différentes de la *compagne de la trochoide allongée*, donnée par Mr. Tailor, qui toutes ſont douées de cette proprieté, que tous leurs points ſe retrouvent en même tems dans l'axe. Mr. D'Alembert a fait enſuite beaucoup de recherches ingénieuſes ſur la nature de ces courbes, qu'il nomme génératrices, & ſur la maniére, dont elles peuvent être engendrées, mais comme ces diſcuſſions n'ont pas un rapport immédiat au ſujet que nous avons en vuë, nous nous contenterons de renvoyer le Lecteur aux Mémoires cités.

13. Mr.

13. Mr. Euler a traité depuis dans le Tôme ſuivant le même problême par une méthode analogue à celle dont nous venons de parler. Il parvient à cette équation $y = \varphi\,(x + t\sqrt{c}) + \varphi\,(x - t\sqrt{c})$, dans laquelle la fonction φ doit être telle, que $\varphi\,(t\sqrt{c}) + \varphi\,(-t\sqrt{c}) = o$, & $\varphi\,(a + t\sqrt{c}) + \varphi\,(a - t\sqrt{c}) = o$, quelle que ſoit la valeur de t, ce qui ne différe pas eſſentiellement de ce qu'on a trouvé ci-devant. Mr. Euler conclut de-là, que toute courbe *anguiforme CcAaBbD* (Fig. 6.) continuée de part & d'autre à l'infini par des parties ſemblables *CcA*, *AaB*, *BbD &c.*, ſituées alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe, ſera propre à repréſenter la fonction φ, ſoit que cette courbe ſoit réguliére, ou qu'elle ſoit irréguliére. D'où il s'enſuit que, puiſque au commencement du mouvement l'équation de la courbe eſt $y = 2\,\varphi\,(x)$, il ſuffira de conſidérer la courbe initiale de la corde *AaB*, quelle qu'elle ſoit, & ſi on réitére ſa deſcription au deſſous, & au deſſus de l'axe de part & d'autre à l'infini, la moitié de la ſomme des ordonnés qui répondent aux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$, $x - t\sqrt{c}$ dans la courbe compoſée *CcAaBb*, ſera l'ordonnée à l'abſciſſe x dans la courbe de la corde tendue après un tems quelconque t.

14. Cette construction de Mr. Euler eſt évidemment beaucoup plus générale que celle, que Mr. D'Alembert a imaginé, celui-ci ayant toujours ſuppoſé que la courbe génératrice fut réguliére, & qu'elle puiſſe être renfermée dans une équation continuë. C'eſt dans cette idée que ce grand Géométre a cru qu'une telle construction devenoit inſuffiſante toutes les fois que dans la courbe génératrice, on n'auroit pas ſuivi la loi de continuité, & il s'eſt contenté d'en avertir le Public dans une Addition à ſes Mémoires imprimée dans le Tôme de l'année. 1750.

Mr. Euler a tâché de répondre à cette objection dans le Tôme pour l'année 1753.; il reprend ici toute l'Analiſe

Digitized by Google

liſe du problême, & il ſoutient conſtamment contre Mr. D'Alembert que pour l'exactitude de la conſtruction donnée, il n'eſt nullement néceſſaire d'avoir égard à la loi de continuité dans la fonction φ, qui dépend de la courbe initiale de la corde. Mais comme Mr. D'Alembert n'a apporté aucune raiſon particuliére pour appuyer ſon objection, Mr. Euler n'en a auſſi apporté aucune, d'où il ſuit que la queſtion reſte encore indéciſe. Mr. D'Alembert promet dans ſa nouvelle Edition de l'excellent Traité de Dinamique de l'Année paſſée un Ecrit aſſés étendu ſur cette matiére; mais je ne ſai pas s'il ait encore vu le jour; en attendant, qu'il me ſoit permis de faire ſur cette diſpute la refléxion ſuivante.

15. Il eſt certain que les Principes du calcul différentiel & intégral dépendent de la conſidération des fonctions variables algébriques; il ne paroit donc pas qu'on puiſſe donner plus d'étendue aux concluſions tirées de ces Principes que n'en comporte la nature même de ces fonctions. Or perſonne ne ſauroit douter que dans les fonctions algébriques toutes leurs différentes valeurs ne ſoient liées enſemble par la loi de continuité; c'eſt pourquoi il ſemble indubitable, que les conſéquences qui ſe déduiſent par les régles du calcul différentiel & intégral, ſeront toujours illégitimes dans tous les cas, ou cette loi n'eſt pas ſuppoſée avoir lieu. Il s'enſuit de-là, que, puiſque la conſtruction de Mr. Euler eſt déduite immédiatement de l'intégration de l'équation différentielle donnée, cette conſtruction n'eſt applicable par ſa propre nature qu'aux courbes continuës, & qui peuvent être exprimées par une fonction quelconque des variables t & x. Je conclus donc que toutes les preuves qu'on peut apporter pour décider une telle queſtion, en ſuppoſant d'abord que l'ordonnée y de la courbe, ſoit une fonction de t & u, comme l'ont fait juſqu'ici Mr. D'Alembert, & Mr. Euler, ſont

ſont abſolument inſuffiſantes; & que ce n'eſt, que par un calcul tel que celui, que nous avons en vuë, dans lequel on conſidére les mouvemens des points de la corde chacun en particulier, qu'on peut eſpérer de parvenir à une concluſion qui ſoit à l'abris de toute atteinte.

16. Pendant le cours d'une telle diſpute entre deux des plus grands Géométres de notre ſiécle, il s'eſt élevé un troiſiéme Adverſaire contre tous les deux; c'eſt le célébre Mr. Daniel Bernoulli ſi avantageuſement connu par ſes excellens Ouvrages. Celui-ci dans un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie Royale de Berlin de l'anne 1753. prétend avoir démontré que la ſolution de Mr. Tailor *de chordis vibrantibus* eſt ſeule capable de ſatisfaire à tous les cas poſſibles d'un tel problême, & il établit cette propoſition générale, que, quel que puiſſe être le mouvement d'une corde tendue, elle ne formera toujours que des trochoides allongées, ou bien que ſa figure ſera un mélange de deux, ou pluſieurs courbes de cette eſpèce. Or nous avons trouvé plus haut (art. 11.), que dans l'hypothèſe de Mr. Tailor l'équation de la corde vibrante eſt généralement $y = Y$ ſin. $(\frac{s \pi x}{2a}) \times$ coſ. $(\frac{s \pi t}{2T} \sqrt{\frac{2hP}{Sa}})$; donc poſant différentes conſtantes α, β, γ, δ *&c* pour Y, & mettant au lieu d's les nombres 1, 2, 3 *&c.* il réſulte pour l'équation générale de la corde ſelon Mr. Bernoulli.

$$
\begin{aligned}
y = {} & \alpha \text{ ſin. } (\tfrac{\pi x}{2a}) \times \text{ coſ. } (\tfrac{\pi t}{2T} \sqrt{\tfrac{2hP}{Sa}}) \\
& + \beta \text{ ſin. } (\tfrac{2\pi x}{2a}) \times \text{ coſ. } (\tfrac{2\pi t}{2T} \sqrt{\tfrac{2hP}{Sa}}) \\
& + \gamma \text{ ſin. } (\tfrac{3\pi x}{2a}) \times \text{ coſ. } (\tfrac{3\pi t}{2T} \sqrt{\tfrac{2hP}{Sa}}) \\
& + \delta \text{ ſin. } (\tfrac{4\pi x}{2a}) \times \text{ coſ. } (\tfrac{4\pi t}{2T} \sqrt{\tfrac{2hP}{Sa}}) \\
& + \&c.
\end{aligned}
$$

L'An-

L'Auteur déduit cette ingénieuſe théorie par une eſpéce d'induction qu'il tire de la conſidération des mouvemens d'un nombre de corps qui ſont ſuppoſés former des vibrations réguliéres & iſochrones; il démontre que s'il n'y a qu'un ſeul corps, il doit ſuivre les loix connues de l'iſochroniſme, que s'il y en a deux, leurs vibrations peuvent être cenſées compoſées de deux vibrations iſochrones de la premiére eſpéce, & ainſi de ſuite; d'où il conclut que l'équation générale apportée ci-deſſus ſera propre à exprimer toutes ces eſpéces de mouvemens, en prenant autant des termes qu'il y a de corps; & que dans le cas de la corde tendue le nombre des termes doit être infini; il appuye de plus ſon ſentiment ſur l'expérience qui nous enſeigne, que d'une même corde il réſulte pluſieurs ſons armonieux, qui répondent pour ainſi dire à chaque terme de ſon équation. Enfin il étend cette théorie à tous les mouvemens réciproques infiniment petits, qui ont lieu dans la nature, & il croit pouvoir en déduire beaucoup de conſéquences importantes. Toutes ces choſes ſont expoſées en détail par l'Auteur dans la piéce citée, à laquelle nous renvoyons les Lecteurs; il me ſuffira d'en avoir donné en général une idée aſſes nette.

Le deſſein de Mr. Bernoulli étoit donc de faire voir que les calculs des Mrs. D'Alembert, & Euler ne nous apprenoient rien de plus, que ce qu'on pouvoit déduire de ceux de Mr. Tailor, & même que ces calculs, quoique extrémement ſimples pouvoient répandre ſur la nature des vibrations des cordes une lumiére qu'on attendroit en vain de l'Analiſe abſtraite & épineuſe de ces deux Géométres.

17. L'un d'eux, ſavoir Mr. Euler s'eſt hâté de répondre à ces objections dans la même Diſſertation citée, qui eſt imprimée à la ſuite de celles de Mr. Bernoulli. Il objecte à ſon tour à celui-ci, que ſon équation pour la

courbe

Digitized by Google

courbe ſonore, quoique continuée à l'infini, ne peut cependant exprimer tous les mouvemens poſſibles d'une corde tendue; car ſi l'on poſe $t = 0$ l'équation de la courbe devient $y = \alpha$ ſin. $(\frac{\pi x}{2a}) + \beta$ ſin. $(\frac{2\pi x}{2a}) + \gamma$ ſin. $(\frac{3\pi x}{2a}) +$ *&c.* Par conſéquent il faudroit que cette équation renfermat toutes les figures qu'on peut donner à une corde tendue, ſavoir toutes les courbes poſſibles, ce qui ne paroit pas être à cauſe de certaines propriétés, qui ſemblent diſtinguer les courbes compriſes dans cette équation de toutes les autres courbes qu'on pourroit imaginer; ces propriétés ſont les mêmes que Mr. D'Alembert requiert dans ſes courbes génératrices, ſavoir qu'en augmentant, ou diminuant l'abſciſſe d'un multiple quelconque de l'axe, la valeur de l'ordonnée y ne change point. En effet l'on peut, ce me ſemble, démontrer que toutes les courbes douées de ces propriétés pourront ſe réduire à l'équation ci-deſſus. D'où il s'enſuit, que quoique Mr. D'Alembert ait trouvé l'Analiſe Tailorienne inſuffiſante pour en tirer une réſolution générale, néanmoins il paroit convenir avec Mr. Bernoulli dans le fond de la choſe, ſavoir que le problême ne ſoit réſouluble dans d'autres cas, que dans ceux de la trochoide, ou du mélange de pluſieurs trochoides.

18. On voit de-là, que les objections de Mrs. Bernoulli, & D'Alembert contre Mr. Euler, quoiqu'elles différent beaucoup les unes des autres, tiennent néanmoins aux mêmes Principes. Au reſte ni Mr. Bernoulli, ni Mr. Euler n'ont fait voir directement, ſi toutes les courbes que peut former une corde tendue ſont compriſes ou non dans l'équation rapportée; car, puiſque dans cette équation chaque terme répond, pour ainſi dire, aux mouvemens de chaque point de la corde, il eut fallu pour cela

donner

Digitized by Google

donner d'abord une ſolution générale du problême de la corde vibrante dans l'hypothéſe qu'elle fut chargée d'un nombre indéfini de corps; ſolution que Mr. Bernoulli même avoue n'avoir jamais vu, & qu'il croit de plus que perſonne n'ait jamais donnée.

Il réſulte de tout cet expoſé que l'Analiſe que nous avons propoſée dans le chapitre précédent eſt, peut être, la ſeule qui puiſſe jetter ſur ces matiéres obſcures une lumiére ſuffiſante à éclaircir les doutes qu'on doit former de part, & d'autre. Je vais donc entreprendre cette Analiſe, & je tâcherai de la développer dans toute ſon étendue, non ſeulement parcequ'elle doit ſatisfaire à tous les objets que nous avons ici en vue; mais encore parce qu'elle eſt, ce me ſemble, entiérement neuve, puiſque il s'agit de déterminer les mouvemens de tant de corps qu'on en voudra ſuppoſer ſans concevoir d'abord qu'il y ait entr'eux aucune loi de continuité, par laquelle ils ſoient liés, pour ainſi dire, & contenus dans une même formule.

Digitized by Google

CHAPITRE III.

Solution du Problême général propoſé dans les chapitres précédens.

19. Soit pour abréger $\frac{2Eh}{MT^2r} = e$, on aura par l'article 8. les équations ſuivantes,

$$\frac{d^2y^{I}}{dt^2} = e\,(y^{II} - 2y^{I})$$

$$\frac{d^2y^{II}}{dt^2} = e\,(y^{III} - 2y^{II} + y^{I})$$

$$\frac{d^2y^{III}}{dt^2} = e\,(y^{IV} - 2y^{III} + y^{II})$$

$$\frac{d^2y^{IV}}{dt^2} = e\,(y^{V} - 2y^{IV} + y^{III})$$

&c.

$$\frac{d^2y^{m-1}}{dt^2} = e\,(-2y^{m-1} + y^{m-2}).$$

Pour intégrer toutes ces équations, on n'a qu'à recourir à la méthode, que Mr. D' Alembert nous a donné dans les Mémoires de l'Académie Royale de Berlin. On ſuppoſera d'abord ſelon cette méthode $dy^{I} = u^{I}dt$, $dy^{II} = u^{II}dt$, $dy^{III} = u^{III}dt$, $dy^{IV} = u^{IV}dt$ &c. $dy^{m-1} = u^{m-1}dt$; ce qui changera les équations différentielles du ſecond ordre dans les ſuivantes du premier

$$du^{I} = e\,(y^{II} - 2y^{I})\,dt$$

$$du^{II} = e\,(y^{III} - 2y^{II} + y^{I})\,dt$$

$$du^{III} = e\,(y^{IV} - 2y^{III} + y^{II})\,dt$$

$$du^{IV} = e\,(y^{V} - 2y^{IV} + y^{III})\,dt$$

&c.

$$du^{m-1} = e\,(-2y^{m-1} + y^{m-2})\,dt.$$

Digitized by Google

Il eſt à remarquer que les quantités u^{I}, u^{II}, u^{III} &c. expriment les viteſſes des corps qui parcourent les eſpaces y^{I}, y^{II}, y^{III} &c. & qu'ainſi il eſt encore important de déterminer leurs valeurs.

Préſentement il faut multiplier toutes ces équations, moins une à volonté, par des coéficiens indéterminés, & les ajouter enſuite dans une même ſomme. Soient M^{I}, M^{II}, M^{III} &c. les coéficiens qui doivent multiplier les derniéres équations, & N^{I}, N^{II}, N^{III} &c. ceux qui multiplient les autres, & on aura $M^{I}\,du^{I} + N^{I}\,dy^{I} + M^{II}\,du^{II} + N^{II}\,dy^{II} + M^{III}\,du^{III} + N^{III}\,dy^{III} + \&c. + M^{n-1}\,du^{n-1} + N^{n-1}\,dy^{n-1} = (N^{I}u^{I} + e[M^{II} - 2M^{I}]y^{I})\,dt + (N^{II}u^{II} + e[M^{III} - 2M^{II} + M^{I}]y^{II})\,dt + (N^{III}u^{III} + e[M^{IV} - 2M^{III} + M^{II}]\,y^{III})\,dt + \&c. + (N^{n-1}u^{n-1} + e[-2M^{n-1} + M^{n-2}]y^{n-1})\,dt$, où l'on ſuppoſera pour plus de facilité le premier coéficient $M^{I} = 1$.

Soit fait enſorte que le premier membre de cette équation devienne un multiple exact de la différentielle du ſecond; & ſuppoſant R un coéficient conſtant quelconque on trouvera par la comparaiſon des termes $RM^{I} = N^{I}$; $RM^{II} = N^{II}$; $RM^{III} = N^{III}$ &c. $RM^{n-1} = N^{n-1}$; enſuite $RN^{I} = e\,(M^{II} - 2M^{I})$; $RN^{II} = e\,(M^{III} - 2M^{II} + M^{I})$; $RN^{III} = e\,(M^{IV} - 2M^{III} + M^{II})$ &c. $RN^{n-1} = e\,(-2M^{n-1} + M^{n-2})$; en ſubſtituant dans ces derniéres équations les valeurs des N tirées des premiéres, il en réſultera

$$R^2 M^{I} = e\,(M^{II} - 2M^{I})$$
$$R^2 M^{II} = e\,(M^{III} - 2M^{II} + M^{I})$$
$$R^2 M^{III} = e\,(M^{IV} - 2M^{III} + M^{II})$$
&c.
$$R^2 M^{n-1} = e\,(-2M^{n-1} + M^{n-2}).$$

Soit poſé $\frac{R^2}{e} + 2 = K$, & en ordonnant les termes on parviendra aux équations

Digitized by Google

$$M^{II} = K M^{I}$$
$$M^{III} = K M^{II} - M^{I}$$
$$M^{IV} = K M^{III} - M^{II}$$
&c.

d'où l'on doit tirer les valeurs d'M.

Pour y parvenir, je conſidère que ces équations étant toutes ſemblables, on peut les exprimer généralement par $M^{\mu} = K M^{\mu-1} - M^{\mu-2}$, poſant pour μ tous les nombres entiers poſitifs depuis o juſqu'à $m - 1$, laquelle équation contient évidemment une ſuite récurrente, dont l'échelle de rélation eſt $K - 1$. On aura donc pour la valeur de M^{μ} l'expreſſion $A a^{\mu} + B b^{\mu}$, où A, & B ſont des conſtantes, & a & b expriment les racines de l'équation du ſecond dégré $z^2 - K z + 1 = 0$. De cette équation l'on tire $z = \frac{K}{2} \pm \sqrt{(\frac{K^2}{4} - 1)}$, ce qui donne $a = \frac{K}{2} + \sqrt{(\frac{K^2}{4} - 1)}$, $b = \frac{K}{2} - \sqrt{(\frac{K^2}{4} - 1)}$. Pour déterminer les conſtantes A & B, on fera la comparaiſon des deux premiers termes, ſavoir M^0, & M^1; or M^0 eſt évidemment égal à zero, puiſque l'équation qu'il devroit multiplier ne ſe trouve pas; & $M^1 = 1$ par ſuppoſition; l'on aura donc $A + B = 0$; & $A a + B b = 1$, d'où l'on déduit $B = - A$; $A (a - b) = 1$; $A = \frac{1}{a - b}$; & $B = - \frac{1}{a - b}$; ces valeurs étant ſubſtituées, il en réſultera $M^{\mu} = \frac{a^{\mu} - b^{\mu}}{a - b}$.

Nous avons ſuppoſé que le nombre des équations fut $= m - 1$ (art. 8.); il faut donc que le coéficient qui auroit multiplié l'équation ſuivante, ſoit de ſoi même égal à zero; ſavoir, il faut que $M^{m} = 0$, ou bien

que

que $\frac{a^m - b^m}{a - b} = 0$. Voila l'équation qui nous donnera la valeur de la quantité R qui étoit encore inconnuë.

20. Pour réſoudre cette équation j'ai recours au fameux théorème de Mr. Cotes, par lequel on trouve $a^m - b^m = (a - b) \sqrt{} (a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{\pi}{m} + b^2) \times \sqrt{} (a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{2\pi}{m} + b^2) \times \sqrt{} (a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{3\pi}{m} + b^2) \times$ &c., en prenant un nombre de facteurs égal à m, de ſorte que le dernier devienne $\sqrt{} (a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2)$, où π dénote la circonférence du cercle, dont le rayon eſt 1. L'on a donc dans notre cas $\sqrt{} (a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{\pi}{m} + b^2) \times \sqrt{} (a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{2\pi}{m} + b^2) \times \sqrt{} (a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{3\pi}{m}) \times \text{\&c.} \times \sqrt{} (a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2) = 0$, ce qui donne autant d'équations particuliéres, qu'il y a de facteurs, ſavoir en dégageant ces expreſſions des radicaux,

$$a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{\pi}{m} + b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{2\pi}{m} + b^2 = 0$$

$$a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{3\pi}{m} + b^2 = 0$$

&c.

$$a^2 - 2ab \text{ coſ. } \frac{[m-1]\pi}{m} + b^2 = 0.$$

Soit v un nombre quelconque entier depuis o juſqu'à $m - 1$, & toutes ces équations ſe réduiront à celle-ci

$a^2 -$

$a^2 - 2ab\,\text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{m} + b^2 = 0$; ſi l'on ſubſtitue les valeurs trouvées de a & b (art. 19.), elle ſe change en $K^2 - 2 - 2\,\text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{m} = 0$, d'où l'on tire $K^2 = 2\,(1 + \text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{m})$, ce qui ſe réduit par les théorèmes de la multiplication des angles à $K^2 = 4\,\text{coſ.}\,(\frac{\nu\pi}{2m})^2$, d'où l'on a enfin $K = \pm 2\,\text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m}$.

21. Je remarque d'abord, que la variété des ſignes dans cette expreſſion de K eſt inutile, parceque en faiſant ν plus grand de $\frac{m}{2}$ la formule nous redonne les mêmes valeurs, que quand ν étoit plus petit, mais avec des ſignes contraires; l'on aura donc ſimplement $K = 2\,\text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m}$, poſant pour ν tous les nombres entiers poſitifs, depuis 0 juſqu'à $m - 1$. Par cette valeur générale de K, on trouvera celle de R par le moyen de l'équation $\frac{R^2}{e} + 2 = K$ (art. 18.); car on aura $R^2 = 2e\,(\text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m} - 1) = -4e\,(\text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m})^2$ par les théorèmes cités, d'où il réſulte $R = \pm 2\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$. On déduira encore de la valeur de K, celles des quantités a & b, comme il ſuit, $a = \text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + \sqrt{([\text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m}]^2 - 1)}$, $b = \text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m} - \sqrt{([\text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m}]^2 - 1)}$, ſavoir

$a =$

$a = \text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$, $b = \text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m} - \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$, d' où l' on tire en ſubſtituant

$$M^{\mu} = \left(\text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}\right)^{\mu} : 2\,\text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$$
$$- \left(\text{coſ.}\,\frac{\nu\pi}{2m} - \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}\right)^{\mu} : 2\,\text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$$

laquelle expreſſion ſe réduit encore, par les mêmes théorèmes ci-deſſus, à $M^{\mu} = \text{ſin.}\,\frac{\mu \times \nu\pi}{2m} : \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m}$.

22. Toutes ces opérations achevées, retournons à préſent ſur nos pas pour procéder à l' intégration de l' équation différentielle (art. 19.). Soit pour abréger $M^{I} u^{I} + M^{II} u^{II} + M^{III} u^{III} + \&c.; + M^{m-1} u^{m-1} + R\,(M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1}) = z$, elle deviendra par ce moyen $dz = Rz\,dt$, dont l'intégrale ſe trouve $z = F c^{Rt}$, où c eſt le nombre, dont le logarithme hyperbolique eſt 1, & F dénote une conſtante quelconque égale à valeur de z, qui répond au cas de $t = 0$; l'on aura, donc en reſtituant au lieu de z ſa valeur premiére, $M^{I} u^{I} + M^{II} u^{II} + M^{III} u^{III} + \&c. + M^{m-1} u^{m-1}; + R\,(M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1}) = F c^{Rt}$, & puiſque $u^{I}\,dt = dy^{I}$; $u^{II}\,dt = dy^{II}$; $u^{III}\,dt = dy^{III}$; &c. ſi l' on multiplie toute l'équation par dt, il en réſultera $M^{I}\,dy^{I} + M^{II}\,dy^{II} + M^{III}\,dy^{III} + \&c. + M^{m-1}\,dy^{m-1} + R\,(M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1})\,dt = F c^{Rt}\,dt$, & multipliant encore par c^{Rt}, & intégrant de nouveau $(M^{I} y^{I} + M^{II} y^{II} + M^{III} y^{III} + \&c. + M^{m-1} y^{m-1})\,c^{Rt} = \frac{F c^{2Rt}}{2R} + G$.

Pour déterminer les conſtantes F & G ſoient V^{I}, V^{II}, V^{III} &c.; V^{m-1}, & Y^{I}, Y^{II}, Y^{III} &c., Y^{m-1}, les valeurs de u^{I},

u^{II},

u^{II}, u^{III} &c., u^{m-1}, & de y^{I}, y^{II}, y^{III} &c., y^{m-1} au commencement du mouvement, lorſque $t = 0$; ſuppoſons de plus pour abréger

$$M^{I}Y^{I} + M^{II}Y^{II} + M^{III}Y^{III} + \&c. + M^{m-1}Y^{m-1} = P.$$

$$M^{I}V^{I} + M^{II}V^{II} + M^{III}V^{III} + \&c. + M^{m-1}V^{m-1} = Q,$$

l'on aura d'abord $F = Q + RP$, enſuite poſant $t = 0$ dans la derniére équation, $P = \frac{F}{2R} + G$, d'où l'on tire

$$G = \frac{2PR - F}{2R} = \frac{2PR - Q - PR}{2R} = \frac{PR - Q}{2R};$$

donc en diviſant l'équation par c^{Rt} on trouvera finalement

$$M^{I}y^{I} + M^{II}y^{II} + M^{III}y^{III} + \&c. + M^{m-1}y^{m-1} = \frac{RP+Q}{2R} \times c^{Rt} + \frac{RP-Q}{2R} \times c^{-Rt} = P \times \frac{c^{Rt} + c^{-Rt}}{2} + \frac{Q}{R} \times \frac{c^{Rt} - c^{-Rt}}{2},$$

ce qui à cauſe de $R = \pm 2\sqrt{e} \times \text{ſin.}\, \frac{\nu\pi}{4m} \times \sqrt{-1}$ ſe reduit à

$$M^{I}y^{I} + M^{II}y^{II} + M^{III}y^{III} + \&c. + M^{m-1}y^{m-1} = P \times \text{coſ.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\, \frac{\nu\pi}{4m}\right) + \frac{Q \times \text{ſin.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\, \frac{\nu\pi}{4m}\right)}{2\sqrt{e} \times \text{ſin.}\, \frac{\nu\pi}{4m}}$$

ſoit qu'on prenne dans R le ſigne $+$, ou le ſigne $-$, comme nous l'enſeignent les expreſſions exponentielles imaginaires des ſinus & coſinus, ſi familiéres aujourd'hui aux Géométres.

23. Cette équation toute ſimple qu'elle eſt ſuffit néanmoins pour déterminer les valeurs des inconnues y^{I}, y^{II}, y^{III} &c. qui ſont au nombre de $m - 1$. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à refléchir qu'elle contient le nombre indéterminé ν, qui peut avoir les valeurs 1, 2, 3 &c. juſqu'à $m - 1$, d'où il réſultera autant d'équations. Tout ſe réduit donc à déterminer par le moyen de toutes ces équa-

Digitized by Google

équations, les valeurs de chaque inconnuë qu'elles contiennent, c'eſt ce que nous allons entreprendre.

Je commence par mettre au lieu des quantités M leurs valeurs trouvées (art. 21.), & effaçant le dénominateur commun ſin. $\frac{\nu\pi}{2m}$ qui s'évanouit naturellement de l'équation, je poſe pour plus de commodité.

$$P^{\nu} = Y^{I}\,\text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + Y^{II}\,\text{ſin.}\,\frac{2\nu\pi}{2m} + Y^{III}\,\text{ſin.}\,\frac{3\nu\pi}{2m} + \&c. + Y^{m-1}\,\text{ſin.}\,\frac{(m-1)\nu\pi}{2m}.$$

$$Q^{\nu} = V^{I}\,\text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + V^{II}\,\text{ſin.}\,\frac{2\nu\pi}{2m} + V^{III}\,\text{ſin.}\,\frac{3\nu\pi}{2m} + \&c. + V^{m-1}\,\text{ſin.}\,\frac{(m-1)\nu\pi}{2m}.$$

Où les expoſans de P, & Q dénoteront ſimplement les valeurs particuliéres de ν, qui leur appartiennent. Ainſi l'équation générale ci-deſſus, deviendra

$$y^{I}\,\text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{2m} + y^{II}\,\text{ſin.}\,\frac{2\nu\pi}{2m} + y^{III}\,\text{ſin.}\,\frac{3\nu\pi}{2m} + \&c. + y^{m-1}\,\text{ſin.}\,(m-1)\,\frac{\nu\pi}{2m} = P^{\nu} \times \text{coſ.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}\right) + \frac{Q^{\nu} \times \text{ſin.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}\right)}{2\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}}$$

Soit encore pour abréger $P^{\nu} \times \text{coſ.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}\right) + \frac{Q^{\nu} \times \text{ſin.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}\right)}{2\sqrt{e} \times \text{ſin.}\,\frac{\nu\pi}{4m}} = S^{\nu}$

& poſant ſucceſſivement à la place de ν tous les nombres naturels depuis 0, jusqu'à $m - 1$, on aura les équations ſuivantes

Digitized by Google

$$y^{\text{I}} \text{ſin.} \frac{\pi}{2m} + y^{\text{II}} \text{ſin.} \frac{2\pi}{2m} + y^{\text{III}} \text{ſin.} \frac{3\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \text{ſin.} (m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{\text{I}}$$

$$y^{\text{I}} \text{ſin.} \frac{2\pi}{2m} + y^{\text{II}} \text{ſin.} \frac{4\pi}{2m} + y^{\text{III}} \text{ſin.} \frac{6\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \text{ſin.} 2(m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{\text{II}}$$

$$y^{\text{I}} \text{ſin.} \frac{3\pi}{2m} + y^{\text{II}} \text{ſin.} \frac{6\pi}{2m} + y^{\text{III}} \text{ſin.} \frac{9\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \text{ſin.} 3(m-1) \frac{\pi}{2m} = S^{\text{III}}$$

&c.

$$y^{\text{I}} \text{ſin.} (m-1) \frac{\pi}{2m} + y^{\text{II}} \text{ſin.} 2(m-1) \frac{\pi}{2m} + \&c. +$$

$$y^{m-1} \text{ſin.} (m-1)^2 \frac{\pi}{2m} = S^{m-1}$$

dont le nombre ſera $m-1$.

Il faudroit à préſent, ſelon les règles ordinaires ſubſtituer les valeurs des inconnues y^{I}, y^{II}, y^{III} &c. d'une équation dans les autres ſucceſſivement, pour arriver à une, qui ne contienne plus qu'une ſeule de ces variables; mais il eſt facile de voir, qu'en s'y prenant de cette façon on tomberoit dans des calculs impraticables à cauſe du nombre indéterminé d'équations & d'inconnues, il eſt donc néceſſaire de ſuivre une autre route; voici celle qui m'a paru la plus propre.

24. Je multiplie d'abord chacune de ces équations par un des coéficiens indéterminés D^{I}, D^{II}, D^{III}, D^{IV} &c., en ſuppoſant que le premier D^{I} ſoit $=1$; enſuite je les ajoute toutes enſemble, j'ai

$$y^{\text{I}} \left(D^{\text{I}} \text{ſin.} \frac{\pi}{2m} + D^{\text{II}} \text{ſin.} \frac{2\pi}{2m} + D^{\text{III}} \text{ſin.} \frac{3\pi}{2m} + \&c \right.$$

$$\left. + D^{m-1} \text{ſin.} [m-1] \frac{\pi}{2m} \right)$$

Digitized by Google

$$+ y^{II} \left(D^{I} \,\text{ſin.}\, \frac{2\pi}{2m} + D^{II} \,\text{ſin.}\, \frac{4\pi}{2m} + D^{III} \,\text{ſin.}\, \frac{6\pi}{2m} + \&c. \right.$$

$$\left. + D^{m-1} \,\text{ſin.}\, 2\,[m-1]\, \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$+ y^{III} \left(D^{I} \,\text{ſin.}\, \frac{3\pi}{2m} + D^{II} \,\text{ſin.}\, \frac{6\pi}{2m} + D^{III} \,\text{ſin.}\, \frac{9\pi}{2m} + \&c \right.$$

$$\left. + D^{m-1} \,\text{ſin.}\, 3\,[m-1]\, \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$+ \&c.$$

$$+ y^{m-1} \left(D^{I} \,\text{ſin.}\, [m-1]\, \frac{\pi}{2m} + D^{II} \,\text{ſin.}\, 2\,[m-1]\, \frac{\pi}{2m} \right.$$

$$\left. + \&c. + D^{m-1} \,\text{ſin.}\, [m-1]^{2}\, \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$= D^{I} S^{I} + D^{II} S^{II} + D^{III} S^{III} + \&c. + D^{m-1} S^{m-1}.$$

Qu'on veuille à préſent la valeur d'un y quelconque, par exemple de y^{μ}, l'on fera évanouir les coéficiens des autres y, & l'on obtiendra l'équation ſimple.

$$y^{\mu} \left(D^{I} \,\text{ſin.}\, \frac{\mu\pi}{2m} + D^{II} \,\text{ſin.}\, \frac{2\mu\pi}{2m} + D^{III} \,\text{ſin.}\, \frac{3\mu\pi}{2m} \right.$$

$$\left. + \&c. + D^{m-1}\, [m-1]\, \frac{\mu\pi}{2m} \right)$$

$$= D^{I} S^{I} + D^{II} S^{II} + D^{III} S^{III} + \&c. + D^{m-1} S^{m-1}.$$

L'on déterminera enſuite les valeurs des quantités D^{II}, D^{III}, D^{IV} &c., qui ſont en nombre de $m-2$ par les équations particuliéres qu'on aura en ſuppoſant égaux à zero les coéficiens de tous les autres y; l'on aura par là l'équation générale.

$$D^{I} \,\text{ſin.}\, \frac{\lambda\pi}{2m} + D^{II} \,\text{ſin.}\, \frac{2\lambda\pi}{2m} + D^{III} \,\text{ſin.}\, \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c.$$

$+ D^{m-1} \,\text{ſin.}\, [m-1]\, \frac{\lambda\pi}{2m} = 0$, laquelle devra être vraie quelque nombre poſitif entier qu'on poſe au lieu de λ depuis 0, juſqu'à $m-1$, excepté μ.

25. Pour

25. Pour tirer de cette équation les valeurs des quantités D, je remarque d'abord, que tout ſinus d'un angle multiple ſe reduit à une ſuite de puiſſances entiéres, & poſitives du coſinus de l'angle ſimple, dont le plus grand expoſant eſt égal au nombre qui en dénote le multiple diminué de l'unité, toute la ſuite étant encore multipliée par le ſinus de l'angle ſimple. Donc ſi l'on développe de cette façon tous les ſinus des angles multiples de $\frac{\lambda\pi}{2m}$ & qu'on diviſe enſuite l'équation par ſin. $\frac{\lambda\pi}{2m}$, on parviendra à une autre équation, qui ne contiendra que des puiſſances de coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$, & dont le dégré ſera $= m - 2$; de-là il ſuit qu'en regardant coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$, comme l'inconnue de cette équation, ſes racines devront être coſ. $\frac{\pi}{2m}$, coſ. $\frac{2\pi}{2m}$, coſ. $\frac{3\pi}{2m}$ &c. juſqu'à coſ. $(m-1)\frac{\pi}{2m}$, excepté coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$. Par conſéquent toute l'équation ne pourra être que le produit continuel des facteurs coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $\frac{\pi}{2m}$; coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $\frac{2\pi}{2m}$; coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $\frac{3\pi}{2m}$, &c. dont le dernier ſera coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $(m-1)\frac{\pi}{2m}$, en omettant toute fois le facteur intermédiaire coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ — coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$; c'eſt pourquoi ſi l'on nomme L une conſtante quelconque, l'on aura

D^1 ſin.

Digitized by Google

$$\frac{D^{\mathrm{I}}\,\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} + D^{\mathrm{II}}\,\text{ſin.}\,\frac{2\lambda\pi}{2m} + \&c. + D^{m-1}\,\text{ſin.}\,(m-1)\frac{\lambda\pi}{2m}}{\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m}}$$

$$= L\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\,\frac{\pi}{2m}\right)\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\,\frac{2\pi}{2m}\right)$$

$$\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\,\frac{3\pi}{2m}\right)\ldots\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\,[m-1]\frac{\pi}{2m}\right)$$

Le théorème déja cité de Mr. Cotes nous donne l'équation

$$p^{2m} - q^{2m} = (p^2 - q^2)\left(p^2 - 2pq\,\text{coſ.}\,\frac{\pi}{2m} + q^2\right)$$

$$\left(p^2 - 2pq\,\text{coſ.}\,\frac{2\pi}{2m} + q^2\right)\left(p^2 - 2pq\,\text{coſ.}\,\frac{3\pi}{2m} + q^2\right)$$

$\ldots\ldots \left(p^2 - 2pq\,\text{coſ.}\,[m-1]\,\frac{\pi}{2m} + q^2\right)$, en n'omettant aucun des facteurs intermédiaires; que l'on compare donc ces facteurs avec ceux de l'équation précédente, en faiſant $p^2 + q^2 = \text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m}$, & $2pq = 1$, & l'on aura

$$p^2 + 2pq + q^2 = 1 + \text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} = 2\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m}\right)^2$$

$$p^2 - 2pq + q^2 = \text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - 1 = -2\left(\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m}\right)^2,$$

d'où en extrayant les racines, il réſulte $p + q = \pm\sqrt{2} \times \text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m}$, $p - q \pm \sqrt{2} \times \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$, & enfin

$$p = \pm\frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} + \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

$$q = \pm\frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} - \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$$

Par

Digitized by Google

Par conſéquent l'on aura

$$p^2 = \frac{1}{2}\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} + \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^2$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} + \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}}{2}$$

$$q^2 = \frac{1}{2}\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} - \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^2$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}}{2}.$$

$p^2 - q^2 = \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} \times \sqrt{-1}$; de même

$$p^{2m} = \frac{1}{2^m}\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} + \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^{2m}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2} + \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^m}$$

$$q^{2m} = \frac{1}{2^m}\left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} - \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{4m} \times \sqrt{-1}\right)^{2m}$$

$$= \frac{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2} - \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^m}$$

$$p^{2m} - q^{2m} = \frac{\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2} \times \sqrt{-1}}{2^{m-1}}$$

Toutes ces valeurs étant ainſi trouvées, l'on diviſera $p^{2m} - q^{2m}$ par $(p^2 - q^2)(p^2 - 2pq\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + q^2)$ ce qui donne $\frac{\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2}}{2^{m-1}\,\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} \times \left(\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m}\right)}$ laquelle expreſſion multipliée par L devra être égale au premier membre

membre de l'équation trouvée dans cet article; dont en ôtant de part & d'autre le diviſeur commun ſin. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ on trouvera

$$D^{I}\,\text{ſin.}\frac{\lambda\pi}{2m}+D^{II}\,\text{ſin.}\frac{2\lambda\pi}{2m}+D^{III}\,\text{ſin.}\frac{3\lambda\pi}{2m}+\&c.$$

$$+D^{m-1}\,\text{ſin.}\,(m-1)\frac{\lambda\pi}{2m}=\frac{L}{2^{m-1}}\times\frac{\text{ſin.}\frac{\lambda\pi}{2}}{\text{coſ.}\frac{\lambda\pi}{2m}-\text{coſ.}\frac{\mu\pi}{2m}}$$

équation qui doit être identique.

Si donc l'on multiplie toute l'équation par coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$ $-$ coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$, & qu'après avoir réduit les produits des ſinus par les coſinus en ſimples ſinus, on faſſe la comparaiſon des termes, on trouvera les valeurs cherchées des quantités indéterminées D. Pour faire cette opération plus aiſément commençons par multiplier la ſuite qui forme le premier membre de l'équation rapportée par 2 coſ. $\frac{\lambda\pi}{2m}$; en développant chaque produit particulier, & en ordonnant les termes, il viendra

$$D^{II}\,\text{ſin.}\frac{\lambda\pi}{2m}+(D^{III}+D^{I})\,\text{ſin.}\frac{2\lambda\pi}{2m}+(D^{IV}+D^{II})$$
$$\text{ſin.}\frac{3\lambda\pi}{2m}+\&c.+D^{m-2}\,\text{ſin.}\,(m-1)\frac{\lambda\pi}{2m}+$$
$$D^{m-1}\,\text{ſin.}\frac{\lambda\pi}{2}.$$

Enſuite ſi l'on multiplie la même ſerie par 2 coſ. $\frac{\mu\pi}{2m}$, & qu'on retranche ce dernier produit de l'autre, on parviendra à l'équation

$$\left(D^{II} - 2\,D^{I}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m}\right)\,\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} + \left(D^{III} - 2\,D^{II}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + D^{I}\right)\,\text{ſin.}\,\frac{2\lambda\pi}{2m} + \left(D^{IV} - 2\,D^{III}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + D^{II}\right)\,\text{ſin.}\,\frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c. + \left(-2\,D^{m-1}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + D^{m-2}\right)\,\text{ſin.}\,[m-1]\,\frac{\lambda\pi}{2m} + D^{m-1}\,\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2} = \frac{L}{2^{m-2}} \times \text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2}.$$

L'on aura donc

$$D^{II} - 2\,D^{I}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} = 0$$

$$D^{III} - 2\,D^{II}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + D^{I} = 0$$

$$D^{IV} - 2\,D^{III}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + D^{II} = 0$$

&c.

$$-2\,D^{m-1}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + D^{m-2} = 0$$

$$D^{m-1} = \frac{L}{2^{m-2}}$$

d'où l'on doit tirer les valeurs des quantités D.

Il eſt viſible au premier aſpect, que les quantités D conſtituent une progreſſion recurrente, dans laquelle en commençant par le bas, il eſt

$$D^{m} = 0$$

$$D^{m-1} = \frac{L}{2^{m-2}}$$

$$D^{m-2} = 2\,D^{m-1}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} - D^{m}$$

$$D^{m-3} = 2\,D^{m-2}\,\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m} - D^{m-1}$$

&c.

Le

Le terme général de cette ſuite ſe trouvera comme ci-deſſus (art. 19.) exprimé de cette façon $D^{m-n} = Aa^n + Bb^n$, où a & b ſont les racines de l'équation du ſecond dégré $z^2 - 2z \operatorname{coſ.} \frac{\mu\pi}{2m} + 1 = 0$. Pour déterminer les conſtantes A & B qu'on poſe $n = 0$, & $= 1$, l'on aura $A + B = 0$, & $Aa + Bb = \frac{L}{2^{m-2}}$, ce qui donne $B = -A$, $A = \frac{L}{2^{m-2}(a-b)}$, $B = -\frac{L}{2^{m-2}(a-b)}$, & par conſéquent $D^{m-n} = \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{a^n - b^n}{a-b}$. Or ſi l'on ſubſtitue au lieu de a & b les racines de l'équation propoſée, il en réſultera par un procédé ſemblable à celui de l'article 25. $\frac{a^n - b^n}{a-b} = \frac{\operatorname{ſin.} \frac{n\mu\pi}{2m}}{\operatorname{ſin.} \frac{\mu\pi}{2m}}$, d'où D^{m-n}

$$= \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\operatorname{ſin.} \frac{n\mu\pi}{2m}}{\operatorname{ſin.} \frac{\mu\pi}{2m}}$$; & poſant pour plus de comodité

$m - n = s$, $D^s = \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\operatorname{ſin.} (m-s)\frac{\mu\pi}{2m}}{\operatorname{ſin.} \frac{\mu\pi}{2m}}$; mais

$\operatorname{ſin.} (m-s)\frac{\mu\pi}{2m} = \operatorname{ſin.} \left(\frac{\mu\pi}{2} - \frac{s\mu\pi}{2m}\right) = \pm \operatorname{ſin.} \frac{s\mu\pi}{2m}$; où le ſigne + doit être pris toutes les fois que μ eſt un nombre impair, & le ſigne − quand μ eſt pair; on aura donc enfin $D^s = \pm \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\operatorname{ſin.} \frac{s\mu\pi}{2m}}{\operatorname{ſin.} \frac{\mu\pi}{2m}}$, & telle eſt la

Digitized by Google

valeur générale de D, d'où dépend la réſolution des équations de l'article 23.

26. Reprenons maintenant l'équation de l'article 24.; & ſubſtituant dans ſon ſecond membre les valeurs trouvées des quantités D, on la réduira d'abord à

$$y^{\mu}\left(D^{\text{I}}\,\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}+D^{\text{II}}\,\text{ſin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m}+D^{\text{III}}\,\text{ſin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m}+\&c\right.$$

$$\left.+D^{m-1}\,\text{ſin.}\,[m-1]\frac{\mu\pi}{2m}\right)=\pm\frac{L}{2^{m-1}\,\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}}$$

$$\left(S^{\text{I}}\,\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}+S^{\text{II}}\,\text{ſin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m}+S^{\text{III}}\,\text{ſin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m}+\&c.\right.$$

$\left.+S^{m-1}\,\text{ſin.}\,[m-1]\frac{\mu\pi}{2m}\right)$. A l'égard du premier membre, on remarquera que $D^{\text{I}}\,\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m}+D^{\text{II}}\,\text{ſin.}\,\frac{2\lambda\pi}{2m}+D^{\text{III}}\,\text{ſin.}\,\frac{3\lambda\pi}{2m}+\&c.+D^{m-1}\,\text{ſin.}\,(m-1)\frac{\lambda\pi}{2m}=\frac{L}{2^{m-1}}\times\frac{\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m}-\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m}}$ (art. 25.)

Donc ſi l'on ſuppoſe $\lambda=\mu$ l'on aura $D^{\text{I}}\,\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}+D^{\text{II}}\,\text{ſin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m}+D^{\text{III}}\,\text{ſin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m}+\&c.+D^{m-1}\,\text{ſin.}\,(m-1)\frac{\mu\pi}{2m}=\frac{L}{2^{m-1}}\times\frac{\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m}-\text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m}}$;

mais puiſque μ eſt un nombre entier, on a ſin. $\frac{\mu\pi}{2}=0$, donc le dernier membre de l'équation ſe réduit à

$\frac{L}{2^{m-1}} \times \frac{0}{0}$. Pour en trouver la vraie valeur ſoit ſuppoſé λ variable; & différentiant à part le numérateur, & le dénominateur de la formule générale

$$\frac{\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2}}{\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\,\frac{\mu\pi}{2m}} \text{ on trouvera } \frac{m\,\text{coſ.}\,\frac{\lambda\pi}{2}}{-\,\text{ſin.}\,\frac{\lambda\pi}{2m}},$$

or μ étant un nombre entier, coſ. $\frac{\mu\pi}{2}$ eſt $= \pm 1$, le ſigne ſupérieur répond à μ pair, l'inférieur à μ impair; l'on aura donc D^{I} ſin. $\frac{\mu\pi}{2m} + D^{II}$ ſin. $\frac{2\mu\pi}{2m} + D^{III}$ ſin. $\frac{3\mu\pi}{2m}$

$$+ \&c. + D^{m-1}\,\text{ſin.}\,(m-1)\,\frac{\mu\pi}{2m} = \pm \frac{L}{2^{m-1}}$$

$$\times \frac{m}{\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}},$$ & ainſi l'équation précédente deviendra

$$\pm y^{\mu} \times \frac{mL}{2^{m-1}\,\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}} = \pm \frac{L}{2^{m-2}\,\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}} \Big(S^{I}\,\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m}$$

$$+ S^{II}\,\text{ſin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m} + S^{III}\,\text{ſin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m} + \&c. + S^{m-1}$$

$$\text{ſin.}\,[m-1]\,\frac{\mu\pi}{2m}\Big),$$ d'où l'on tire

$$y^{\mu} = \frac{2}{m} \times \Big(S^{I}\,\text{ſin.}\,\frac{\mu\pi}{2m} + S^{II}\,\text{ſin.}\,\frac{2\mu\pi}{2m} + S^{III}\,\text{ſin.}\,\frac{3\mu\pi}{2m}$$

$$+ \&c. + S^{m-1}\,\text{ſin.}\,[m-1]\,\frac{\mu\pi}{2m}\Big).$$

Voila donc quelle doit être l'expreſſion générale des y qui dénotent les eſpaces parcourus par chacun des corps dans un tems quelconque t.

27. Pour connoître plus clairement la nature de l'équation trouvée, on y ſubſtituera les valeurs des quantités

S^{I}, S^{II}, S^{III} de l'art. 23. ce qui donnera finalement la formule

$$y^{\mu} = \frac{2}{m} \times P^{I} \text{ ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ coſ. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{\pi}{4m}\right)$$
$$+ \frac{2}{m} \times P^{II} \text{ ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ coſ. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{2\pi}{4m}\right)$$
$$+ \frac{2}{m} \times P^{III} \text{ ſin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ coſ. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{3\pi}{4m}\right)$$
$$+ \&c.$$
$$+ \frac{2}{m} P^{m-1} \text{ ſin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ coſ. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}\right)$$
$$+ \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{I} \text{ ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{\pi}{4m}\right)}{\text{ſin. } \frac{\pi}{4m}}$$
$$+ \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{II} \text{ ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{2\pi}{4m}\right)}{\text{ſin. } \frac{2\pi}{4m}}$$
$$+ \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{III} \text{ ſin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{3\pi}{4m}\right)}{\text{ſin. } \frac{3\pi}{4m}}$$
$$+ \&c.$$
$$+ \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{m-1} \text{ ſin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}\right)}{\text{ſin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}}$$

les quantités P^{I}, P^{II}, P^{III} &c. & Q^{I}, Q^{II}, Q^{III} dépendent de la premiére ſituation des corps, & de leurs premiéres viteſſes, ſelon les ſuppoſitions de l'article 22.

De

Digitized by Google

De cette expreſſion de y^μ on tirera aiſément celle de u^μ qui exprime la viteſſe, avec laquelle l'eſpace y^μ eſt parcouru; car puiſque $u^\mu = \frac{dy^\mu}{dt}$, on n'aura qu'à différentier l'équation donnée en faiſant t variable; & on trouvera l'expreſſion ſuivante.

$$\begin{aligned}
u^\mu = & - \frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{\mathrm{I}} \text{ ſin. } \frac{\pi}{4m} \times \text{ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{\pi}{4m}) \\
& - \frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{\mathrm{II}} \text{ ſin. } \frac{2\pi}{4m} \times \text{ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{2\pi}{4m}) \\
& - \frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{\mathrm{III}} \text{ ſin. } \frac{3\pi}{4m} \times \text{ſin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ſin. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{3\pi}{4m}) \\
& - \&c. \\
& - \frac{4\sqrt{e}}{m} \times P^{m-1} \text{ ſin. } [m-1] \frac{\pi}{4m} \times \text{ſin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \\
& \qquad \text{ſin. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}) \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{\mathrm{I}} \text{ ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{\pi}{4m}) \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{\mathrm{II}} \text{ ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{2\pi}{4m}) \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{\mathrm{III}} \text{ ſin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } (2t\sqrt{e} \times \text{ſin. } \frac{3\pi}{4m}) \\
& + \&c. \\
& + \frac{2}{m} \times Q^{m-1} \text{ ſin. } [m-1] \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } (2t\sqrt{e} \times \\
& \qquad \text{ſin. } [m-1] \frac{\pi}{4m}).
\end{aligned}$$

CHA-

CHAPITRE IV.

Analiſe du cas, où le nombre des corps mobiles eſt fini.

28. NOUS regarderons les quantités y, comme des ordonnées à l'axe AB (Fig. 7.), qui eſt ſuppoſé diviſé en un nombre m de parties égales à r; & les expoſans de ces variables exprimeront le quantiéme de la place qu'elles occupent ſur l'axe, en comptant depuis l'extrémité A. Ainſi le poligone qu'on pourra faire paſſer par les extrémités de toutes ces ordonnées ſera la figure de la corde tendue, & chargée à chaque angle d'un poid M, & il ſera en même tems le lieu géométrique des excurſions des corps élaſtiques M, diſpoſés dans la même ligne droite AB, ſelon ce qu'on a démontré dans les chapitres précédens.

Il eſt d'abord évident que la formule qui donne la valeur de y^μ eſt compoſée d'une ſuite de formules telles que

$$A \text{ ſin.} \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.} \left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.} \frac{s\pi}{4m}\right) + \frac{B \text{ ſin.} \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.} \left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.} \frac{s\pi}{4m}\right)}{\text{ſin.} \frac{s\pi}{4m}}$$

que je dénoterai dorénavant par φ^μ; A & B ſont des conſtantes qui dépandent du premier état du ſiſtème des corps, & s exprime un nombre quelconque dans la ſuite naturelle $1, 2, 3, \ldots\ldots m-1$; ainſi ſi l'on conſtruit un nombre $m-1$ de poligones qui répondent tous à cette expreſſion générale en y ſuppoſant s ſucceſſivément égal à $1, 2, 3,$ *&c.* juſqu'à $m-1$, & qu'on prenne

Digitized by Google

prenne le premier pour axe du ſecond, le ſecond pour axe du troiſiéme, & ainſi de ſuite, le dernier qui ſera formé ſur tous les autres contiendra les vraies valeurs de toutes les variables y; d'où l'on voit que les mouvemens rectilignes des corps qui parcourent les eſpaces y^{I}, y^{II}, y^{III}, *&c.* pourront être cenſés compoſés d'autant de mouvemens particuliers qu'il y a de corps mobiles.

Examinons de plus près la compoſition de ces mouvemens.

29. Soit poſé $\varphi^{\mu} = 0$, l'on aura les deux équations $\text{ſin.}\ \frac{s\mu\pi}{2m} = 0$, & $A\ \text{coſ.}\ (2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}) +$

$$\frac{B\ \text{ſin.}\ (2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m})}{\text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}} = 0,$$ qui détermineront les points, où chacun des poligones ſimples pourra couper ſon propre axe. Il eſt viſible que la premiére aura lieu toutes les fois que $\frac{s\mu}{m}$ ſera égal à zero, ou à un nombre entier quelconque; ſoit donc k un tel nombre, on aura $\frac{s\mu}{m} = k$, & $\mu = \frac{km}{s}$, laquelle valeur de μ ſatisfera toujours quel que ſoit le tems t.

Soit $s = 1$, l'on aura $\mu = km, = 0, = m, = 2m$, *&c.* d'où il s'enſuit que le poligone ne pourra rencontrer l'axe AB que dans ſes deux extrémités A & B, il ſera donc tout au deſſus, ou au deſſous de lui comme l'on voit (Fig. 7.).

Soit $s = 2$ l'on aura $\mu = \frac{km}{2} = 0, = \frac{m}{2} = m$; *&c.* le poligone coupera donc l'axe au milieu C, & il aura par conſéquent une moitié au deſſus, & l'autre au deſſous, comme dans la (Fig. 8.)

Soit

Soit $s = 3$, l'on aura $\mu = \frac{km}{3}, = 0, = \frac{m}{3}, = \frac{2}{m}, = m$ &c. Et le poligone rencontrera l'axe deux fois, & le diviſera en trois parties égales, il aura donc une figure ſemblable à celle qu'on voit (Fig. 9.), & ainſi de ſuite. D'où l'on conclura que les poligones auront toujours autant de ventres d'égale longueur qu'il y a d'unités dans le nombre s.

30. Préſentement ſi l'on s'attache à la ſeconde équation on trouvera en la réduiſant, $\text{ſin.}\left(2t\sqrt{e} \times \text{ſin.}\frac{s\pi}{4m}\right)$

$$= \frac{A\ \text{ſin.}\frac{s\pi}{4m}}{\sqrt{\left(B^2 + A^2\left[\text{ſin.}\frac{s\pi}{4m}\right]^2\right)}}$$ Poſons pour abréger

$$\frac{A\ \text{ſin.}\frac{s\pi}{4m}}{\sqrt{\left(B^2 + A^2\left[\text{ſin.}\frac{s\pi}{4m}\right]^2\right)}} = Z,$$ on en tirera $2t\sqrt{e}\ \text{ſin.}\frac{s\pi}{4m}$

$$= \text{Arc.}(\text{ſin.}Z), \ \& \ t = \frac{\text{Arc.}(\text{ſin.}Z)}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\frac{s\pi}{4m}}.$$ Equation qui pourra être vraie quel que ſoit le nombre μ, parceque il n'y entre point; d'où il ſuit que les poligones ne peuvent jamais couper leurs axes en d'autres points, que dans ceux que nous avons déterminé ci-deſſus, à moins qu'ils ne ſe confondent entiérement avec les axes mêmes, ce qui arrivera toutes les fois, que t aura la valeur aſſignée. Or comme il y a une infinité d'Arcs qui répondent tous aux mêmes ſinus, la quantité t pourra auſſi recevoir une infinité de valeurs. Pour les trouver ſoit θ le moindre Arc qui répond au ſinus Z, & k un nombre quelconque entier, on aura généralement

$t =$

Digitized by Google

$$t = \frac{k\pi + \theta}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}\text{, où encore } t = \frac{(2k+1)\frac{\pi}{2} - \theta}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}.$$

il réſulte donc de cette formule qu'après que le poligone ſe ſera pour la premiére fois étendu en ligne droite, il retournera dans cet état à chaque intervalle de tems exprimé par $\frac{\pi}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}$, qu'on devra par conſéquent regarder comme le tems d'une oſcillation entiére, d'où l'on voit que ces tems, toutes choſes d'ailleurs égales, ſeront en raiſon inverſe de ſin. $\frac{s\pi}{4m}$, donc le tems d'une vibration pour la premiére figure ſera à celui de la ſeconde, de la troiſiéme, &c. comme ſin. $\frac{\pi}{2m}$ à ſin. $\frac{\pi}{4m}$; comme ſin. $\frac{3\pi}{4m}$ à ſin. $\frac{\pi}{4m}$, & ainſi de ſuite.

31. Les loix des mouvemens de chacun des poligones ſimples, nous feront aiſément connoître par leur combinaiſon ceux du poligone compoſé. Nous venons de voir que le premier poligone qui a pour axe la droite AB n'a qu'un ſeul ventre, & que ſes vibrations s'achévent dans un tems proportionel à $\frac{1}{\text{ſin.}\ \frac{\pi}{4m}}$; que le ſecond qui a pour axe celui-ci, contient deux ventres, & qu'il emploie dans chaque vibration un tems proportionel à $\frac{1}{\text{ſin.}\ \frac{\pi}{2m}}$ & ainſi de ſuite. Il s'enſuit de-là, que, puiſque ces tems ſont preſque toujours incommenſurables entr'eux, il arrivera très-rarement que le poligone compoſé s'étende

tout en ligne droite; c'eſt pourquoi ſes vibrations paroitront tout-à-fait irréguliéres, quoiqu'elles ſoient compoſées d'un nombre de vibrations ſimples, réguliéres & iſocrones en elles mêmes.

32. Cette théorie générale que nous avons immédiatement déduit de nos formules, appliquée aux mouvemens des cordes vibrantes eſt la même que Mr. Daniel Bernoulli a inventé ſur ce ſujet, comme on l'a expoſé dans le Chapitre III.; ſi donc ce grand Homme a pû croire qu'une ſolution purement analitique étoit en elle même incapable de faire connoître la véritable nature de ces mouvemens, ces recherches pourront ouvrir une route nouvelle pour faire des applications de calcul à des ſujets qui n'en paroiſſoient pas ſuſceptibles, & ſervir à perfectioner l'Analiſe. Au reſte on ne peut trop eſtimer la ſagacité, & la pénétration de ce célèbre Géomètre, qui par un pur examen ſintétique de la queſtion propoſée eſt parvenu à réduire à des loix ſimples & générales des mouvemens qui ſemblent s'y refuſer par leur nature.

33. Avant que d'abandonner cette matiére, examinons encore les cas, où les vibrations compoſées peuvent dévenir ſimples & réguliéres.

Il eſt viſible que ceci arrivera toutes les fois que $y^{\mu} = \varphi^{\mu}$, ſavoir quand tous les termes exprimés généralement par φ^{μ} ſe réduiront à un ſeul quel qu'il ſoit. Soit s le quantiéme du terme reſtant, on aura par l'art. 27.

$$y^{\mu} = \frac{2}{m} \times P^{s} \text{ ſin. } \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{coſ. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{s\pi}{4m}\right)$$

$$+ \frac{1}{m\sqrt{e}} \times \frac{Q^{s} \text{ ſin. } \frac{s\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \left(2t\sqrt{e} \times \text{ ſin. } \frac{s\pi}{4m}\right)}{\text{ſin. } \frac{s\pi}{4m}}$$

enſuite il faudra que $P^{I} = 0$; $P^{II} = 0$; $P^{III} = 0$ &c. juſqu'à P^{m-1}, excepté P^{s}; & de même $Q^{I} = 0$; $Q^{II} = 0$; $Q^{III} = 0$ &c. juſqu'à Q^{m-1}, excepté Q^{s}; d'où

l'on

Digitized by Google

l'on tirera les conditions réquiſes dans le premier état du ſiſtème, afin que les vibrations des corps ſuivent les loix propoſées. On aura donc ces deux équations

$$Y^{\text{I}} \text{ ſin. } \frac{\sigma\pi}{2m} + Y^{\text{II}} \text{ ſin. } \frac{2\sigma\pi}{2m} + Y^{\text{III}} \text{ ſin. } \frac{3\sigma\pi}{2m} + \&c.$$

$$+ Y^{m-1} \text{ ſin. } (m-1)\frac{\sigma\pi}{2m} = 0$$

$$V^{\text{I}} \text{ ſin. } \frac{\sigma\pi}{2m} + V^{\text{II}} \text{ ſin. } \frac{2\sigma\pi}{2m} + V^{\text{III}} \text{ ſin. } \frac{3\sigma\pi}{2m} + \&c.$$

$$+ V^{m-1} \text{ ſin. } (m-1)\frac{\sigma\pi}{2m} = 0$$

qui devront ſe vérifier quelque nombre qu'on poſe au lieu de σ depuis 1, juſqu'à $m-1$, excepté s.

Que l'on compare maintenant cette équation avec celle de l'art. 24., il eſt évident qu'en ſubſtituant σ au lieu de λ, & s, au lieu de μ, les quantités Y & V ſeront déterminées de la même maniére que les quantités D; c'eſt pourquoi l'on trouvera généralement

$$Y^{\nu} = \pm \frac{L}{2^{m-2}} \times \frac{\text{ſin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{ſin. } \frac{s\pi}{2m}}, \ \& \ V^{\nu} = \pm \frac{L^{\text{I}}}{2^{m-2}} \times \frac{\text{ſin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{ſin. } \frac{s\pi}{2m}}$$

où L, & L^{I} ſont deux conſtantes arbitraires, qu'on pourra déterminer par la valeur de deux termes quelconques de la ſuite des Y & des V. Suppoſant donc que les deux premiéres quantités Y & V ſoient données, l'on aura $\frac{L}{2^{m-2}} = Y$, & $\frac{L^{\text{I}}}{2^{m-2}} = V$; d'où l'on tire enfin

$$Y^{\nu} = \pm Y \frac{\text{ſin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{ſin. } \frac{s\pi}{2m}}, \ V^{\nu} = \pm V \frac{\text{ſin. } \frac{\nu s\pi}{2m}}{\text{ſin. } \frac{s\pi}{2m}}$$ le ſigne ſupérieur répond à s impair, & l'inférieur à s pair.

Telle

Telles ſont les valeurs qu'il faudra donner d'abord aux viteſſes, & aux éloignemens des corps, afin que le ſiſtème ſouffre des vibrations ſimples & réguliéres, ſuivant les loix de l'eſpèce s^{me} qui contient s ventres, & dont le tems d'une oſcillation entiére eſt toujours exprimé par $\frac{\pi}{2\sqrt{e}\ \text{ſin.}\ \frac{s\pi}{4m}}$. L'on peut prendre dans ces formules le nombre s égal à 1, à 2, à 3, *&c.* juſqu'à $m - 1$, d'où il s'enſuit qu'on peut donner à tout le ſiſtème autant d'arrangemens différens, qui néanmoins ſeront tous propres à produire tant le ſincroniſme, que l'iſocroniſme des corps.

Ce problême a été déja réſolu par quelques Géomètres dans le cas d'un nombre de corps déterminé, mais la route qu'ils ont pris les a toujours conduit à des équations d'un dégré égal au nombre des corps mobiles, dont il falloit par conſéquent chercher les racines dans chaque cas particulier; je ne crois pas qu'on ait jamais donné pour cela une formule générale, telle que nous venons de la trouver.

CHA-

CHAPITRE V.

Analiſe du cas, où le nombre des corps mobiles eſt infini.

34. LA théorie du mélange des vibrations ſimples & réguliéres que nous venons d'établir découle de la forme même des équations trouvées. Or cette forme ſubſiſtera toujours, tandis que le nombre des corps mobiles ſera fini, ſavoir quand m ſera un nombre fini, mais ſera-t-il auſſi vrai que la ſuppoſition de m infini, ne défigure pas, pour ainſi dire, l'équation, & n'en altére pas entiérement la forme? c'eſt ce que nous allons examiner dans ce chapitre.

Il eſt évident qu'en faiſant $m = \infty$ les angles $\frac{\pi}{4m}$, $\frac{2\pi}{4m}$, $\frac{3\pi}{4m}$ *&c.* deviendront infiniment petits, & que leurs ſinus ne différeront pas des Arcs qui leur appartiennent; ainſi l'on aura, $\text{ſin.}\ \frac{\pi}{4m} = \frac{\pi}{4m}$; $\text{ſin.}\ \frac{2\pi}{4m} = \frac{2\pi}{4m}$; $\text{ſin.}\ \frac{3\pi}{4m} = \frac{3\pi}{4m}$ *&c.* donc la formule qui donne la valeur de y^μ ſe changera en celle-ci.

$$
\begin{aligned}
y^\mu = {} & \frac{2}{m} \times P^{I}\ \text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.}\ \frac{\pi t \sqrt{e}}{2m} \\
& + \frac{2}{m} \times P^{II}\ \text{ſin.}\ \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.}\ \frac{2\pi t \sqrt{e}}{2m} \\
& + \frac{2}{m} \times P^{III}\ \text{ſin.}\ \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{coſ.}\ \frac{3\pi t \sqrt{e}}{2m} \\
& + \text{\&c. à l'infini} \\
& + \frac{4}{\pi\sqrt{e}} \times Q^{I}\ \text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{\pi t \sqrt{e}}{2m}
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

$$+ \frac{4}{2\pi\sqrt{e}} \times Q^{II} \text{ ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{4}{3\pi\sqrt{e}} \times Q^{III} \text{ ſin. } \frac{3\pi\mu}{2m} \times \text{ ſin. } \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$+$ *&c.* à l'infini

l'on aura de même dans ce cas

$$u^{\mu} = -\frac{\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{I} \text{ ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \frac{\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$-\frac{2\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{II} \text{ ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$-\frac{3\pi\sqrt{e}}{m^2} \times P^{III} \text{ ſin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ ſin. } \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$-$ *&c.* à l'infini

$$+ \frac{2}{m} \times Q^{I} \text{ ſin. } \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ coſ. } \frac{\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{2}{m} \times Q^{II} \text{ ſin. } \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ coſ. } \frac{2\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$$+ \frac{2}{m} \times Q^{III} \text{ ſin. } \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ coſ. } \frac{3\pi t\sqrt{e}}{2m}$$

$+$ *&c.* à l'infini

35. Soient infiniment petites les maſſes M des corps, en ſorte que leur ſomme ſoit finie, & $= S$, on aura $m = \frac{S}{M}$, de plus ſi a exprime la longueur de l'axe AB, on aura encore $m = \frac{a}{r}$, d'où $\frac{a}{r} = \frac{S}{M}$, & $r = \frac{aM}{S}$, donc la quantité e qui eſt $= \frac{2Eh}{MT^2r}$ (art. 19.) deviendra $= \frac{2EhS}{T^2M^2a}$, & par conſéquent $\frac{\sqrt{e}}{m} = \frac{1}{TMm} \sqrt{\left(\frac{2EhS}{a}\right)}$;

ou bien puiſque $m \times M = S$, il ſera $\frac{\sqrt{e}}{m} = \frac{1}{T}\sqrt{\left(\frac{2Eh}{aS}\right)}$ qui eſt une quantité finie, & toute connuë, qu'on ſuppoſera pour abréger $= \frac{H}{T}$.

36. Suppoſons que le rapport des nombres m, & μ ſoit celui de $a : x$; x exprimera l'abſciſſe dans l'axe AB, a laquelle repondra l'ordonnée y^{μ}, de même que la viteſſe u^{μ}, l'on aura donc $\frac{\mu}{m} = \frac{x}{a}$; & faiſant de plus dx conſtante, & égale à r, on aura $\frac{a}{dx} = m$; toutes ces valeurs ſubſtituées dans les formules ci-deſſus l'on obtiendra généralement

$$y = \frac{2\,dx}{a} \times P^{\mathrm{I}} \text{ſin.}\, \frac{\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{\pi H t}{2T}$$
$$+ \frac{2\,dx}{a} \times P^{\mathrm{II}} \text{ſin.}\, \frac{2\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{2\pi H t}{2T}$$
$$+ \frac{2\,dx}{a} \times P^{\mathrm{III}} \text{ſin.}\, \frac{3\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{3\pi H t}{2T}$$
$$+ \text{\&c. à l'infini}$$
$$+ \frac{4T\,dx}{\pi H a} \times Q^{\mathrm{I}} \text{ſin.}\, \frac{\pi x}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{\pi H t}{2T}$$
$$+ \frac{4T\,dx}{2\pi H a} \times Q^{\mathrm{II}} \text{ſin.}\, \frac{2\pi x}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{2\pi H t}{2T}$$
$$+ \frac{4T\,dx}{3\pi H a} \times Q^{\mathrm{III}} \text{ſin.}\, \frac{3\pi x}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{3\pi H t}{2T}$$
$$+ \text{\&c. à l'infini}$$

& de même

$$u = -\frac{\pi H\,dx}{aT} \times P^{\mathrm{I}} \text{ſin.}\, \frac{\pi x}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{\pi H t}{2T}$$

$- 2\pi H dx$

$$- \frac{2\pi H dx}{aT} \times P^{II}\ \text{ſin.}\ \frac{2\pi x}{2a} \times \text{ſin.}\ \frac{2\pi H t}{2T}$$

$$- \frac{3\pi H dx}{aT} \times P^{III}\ \text{ſin.}\ \frac{3\pi x}{2a} \times \text{ſin.}\ \frac{3\pi H t}{2T}$$

$-$ *&c.* à l' infini

$$+ \frac{2dx}{a} \times Q^{I}\ \text{ſin.}\ \frac{\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\ \frac{\pi H t}{2T}$$

$$+ \frac{2dx}{a} \times Q^{II}\ \text{ſin.}\ \frac{2\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\ \frac{2\pi H t}{2T}$$

$$+ \frac{2dx}{a} \times Q^{III}\ \text{ſin.}\ \frac{3\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\ \frac{3\pi H t}{2T}$$

$+$ *&c.* à l' infini.

37. Préſentement il faut ſubſtituer dans ces formules les expreſſions des quantités P^{I}, P^{II}, P^{III} *&c.* Q^{I}, Q^{II}, Q^{III} *&c.* d' où en ordonnant les termes par les quantités connues Y^{I}, Y^{II}, Y^{III} *&c.* V^{I}, V^{II}, V^{III} *&c.* on trouvera autant de ſuites infinies, dont chacune ſera multipliée par une de ces quantités.

Soit $X : a$ la raiſon générale des expoſans des Y & des V au nombre m, X dénotera la partie de l'axe qui leur eſt correſpondante dans le premier état du ſiſtème; donc ſi l'on emploie le ſigne intégral $\int$ pour exprimer la ſomme de toutes ces ſuites, on aura

$$y = \frac{2}{a} \int dx Y \Big(\text{ſin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\ \frac{\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\ \frac{\pi H t}{2T}$$

$$+ \text{ſin.}\ \frac{2\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\ \frac{2\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\ \frac{2\pi H t}{2T}$$

$$+ \text{ſin.}\ \frac{3\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\ \frac{3\pi x}{2a} \times \text{coſ.}\ \frac{3\pi H t}{2T}$$

$+$ *&c.* à l' infini)

$+ 4T$

$$+\frac{4T}{\pi H a}\int dx\,V\Big(\text{ſin.}\,\frac{\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{\pi x}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{\pi H t}{2T}$$
$$+\frac{1}{2}\,\text{ſin.}\,\frac{2\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{2\pi x}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{2\pi H t}{2T}$$
$$+\frac{1}{3}\,\text{ſin.}\,\frac{3\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{3\pi x}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{3\pi H t}{2T}$$
$$+\ \&c.\ \text{à l'infini}\Big)$$

& de même pour u

$$u=-\frac{\pi H}{aT}\int dx\,Y\Big(\text{ſin.}\,\frac{\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{\pi x}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{\pi H t}{2T}$$
$$+2\,\text{ſin.}\,\frac{2\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{2\pi x}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{2\pi H t}{2T}$$
$$+3\,\text{ſin.}\,\frac{3\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{3\pi x}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{3\pi H t}{2T}$$
$$+\ \&c.\ \text{à l'infini}\Big).$$

$$+\frac{2}{a}\int dx\,V\Big(\text{ſin.}\,\frac{\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{\pi x}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{\pi H t}{2T}$$
$$+\text{ſin.}\,\frac{2\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{2\pi x}{2a}\times\text{coſ.}\,\frac{2\pi H t}{2T}$$
$$+\text{ſin.}\,\frac{3\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{3\pi x}{2a}\times\text{coſ.}\,\frac{3\pi H t}{2T}$$
$$+\ \&c.\ \text{à l'infini}\Big),$$

où il eſt à remarquer que les intégrations doivent ſe faire en ſuppoſant X, Y, & V variables, & t, & x conſtantes.

38. Si on reflêchit maintenant ſur ces formules, on s'appercevra, que la premiere partie de l'expreſſion de y, & la ſeconde partie de l'expreſſion de u qui ne différent entr'elles, que par rapport aux quantités Y & V ſeront ſommables au moyen de la formule trouvée (art. 25.). Qu'on ſuppoſe donc, pour ſimplifier le calcul, que les

 quan-

quantités V s'évanouiſſent dans la formule de y, & les quantités Y dans celle de u, ce qui réduit le problême aux ſeuls cas conſidérés juſqu'à préſent dans les cordes vibrantes; & on pourra ſe contenter de faire le calcul pour la valeur de y, puiſque en changeant ſimplement les Y en V on obtiendra tout de ſuite celle de u. Je raméne d'abord l'expreſſion ſin. $\frac{\pi x}{2a} \times$ coſ. $\frac{\pi H t}{2T}$ à celle-ci

$$\frac{\text{ſin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T}\right)+\text{ſin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T}\right)}{2},$$

& en opérant de la même maniére ſur toutes les autres je change la formule en

$$\begin{aligned}y = \frac{1}{a}\int dx\,Y\Big(&\text{ſin.}\ \frac{\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\text{ſin.}\ \frac{2\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\ \frac{2\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\text{ſin.}\ \frac{3\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\ \frac{3\pi}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\ \&c.\ \text{à l'infini}\Big)\\ +\frac{1}{a}\int dx\,V\Big(&\text{ſin.}\ \frac{\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\text{ſin.}\ \frac{2\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\ \frac{2\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\text{ſin.}\ \frac{3\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\ \frac{3\pi}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T}\right)\\ &+\ \&c.\ \text{à l'infini}\Big).\end{aligned}$$

Or ſi l'on met dans la formule de l'art. 25. au lieu des quantités D leurs valeurs $\pm \frac{L}{2m-2} \times \frac{\text{ſin.}\ \frac{s\mu\pi}{2m}}{\text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m}}$ & qu'on

mul-

multiplie tout par 2^{m-1} ſin. $\frac{\mu\pi}{2m}$, on trouve généralement

$$\text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} + \text{ſin.}\ \frac{2\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{2\lambda\pi}{2m} + \text{ſin.}\ \frac{3\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{3\lambda\pi}{2m} + \&c. + \text{ſin.}\ (m-1)\frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ (m-1)\frac{\lambda\pi}{2m}$$

$$= \pm\frac{1}{2}\ \frac{\text{ſin.}\ \frac{\mu\pi}{2m} \times \text{ſin.}\ \frac{\lambda\pi}{2}}{\text{coſ.}\ \frac{\lambda\pi}{2m} - \text{coſ.}\ \frac{\mu\pi}{2m}},$$ où le ſigne + a lieu, lorſque μ eſt impair, & le ſigne − lorſqu'il eſt pair, donc ſi l'on poſe $\frac{\mu}{m} = \frac{X}{a}$, & $\frac{\lambda}{m} = \frac{x}{a} \pm \frac{H}{T}$, il en réſultera

$$y = \pm\frac{1}{2a}\int \frac{dx\,Y\ \text{ſin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} + \frac{mHt}{T}\right)}{\text{coſ.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}\right) - \text{coſ.}\ \frac{\pi X}{2a}}$$

$$\pm\frac{1}{2a}\int \frac{dx\,Y\ \text{ſin.}\ \frac{\pi X}{2a} \times \text{ſin.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} - \frac{mHt}{T}\right)}{\text{coſ.}\ \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}\right) - \text{coſ.}\ \frac{\pi X}{2a}}$$

Or puiſque m eſt infini, $m\left(\frac{x}{a} \pm \frac{Ht}{T}\right)$ ſera toujours un nombre entier quels que ſoient x & t, donc l'on aura ſin. $\frac{\pi}{2}\left(\frac{mx}{a} \pm \frac{mHt}{T}\right) = 0$, & par conſéquent les ter-termes qui conſtituent les intégrales exprimés par $\int$ s'évanouiront en général. Il y a pourtant un cas particulier à excepter, c'eſt celui où $\frac{x}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la première intégrale, & $\frac{x}{a} - \frac{Ht}{T}$ dans la ſeconde deviennent $= 2s \pm \frac{X}{a}$, s dénotant un nombre quelconque entier poſitif,

ou négatif, car dans ces cas les dénominateurs coſ. $\frac{\pi}{2}$ $(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T})$ — coſ. $\frac{\pi X}{2a}$, & coſ. $\frac{\pi}{2}(\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T})$ — coſ. $\frac{\pi X}{2a}$ deviennent égaux à zero, & les termes ſe trouvent exprimés par $\frac{0}{0}$. Pour en déterminer les vraies valeurs on prendra la différentielle des numérateurs, & des dénominateurs, en conſidérant $\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T}$ dans la premiére formule, & $\frac{x}{a}-\frac{Ht}{T}$ dans la ſeconde pour les ſeules variables; on mettra enſuite à leur place la quantité $2s \pm \frac{X}{a}$; l'on trouvera donc en premier lieu

$$\frac{1}{2a}\int\frac{dxY\,\text{ſin.}\,\frac{\pi X}{2a}\times\text{ſin.}\,\frac{\pi}{2}(\frac{mx}{2a}+\frac{mHt}{T})}{\text{coſ.}\,\frac{\pi}{2}(\frac{x}{a}+\frac{Ht}{T})-\text{coſ.}\,\frac{\pi X}{2a}}=$$

$$-\frac{m}{2a}\times\frac{dxY\,\text{ſin.}\,\frac{\pi X}{2a}\times\text{coſ.}\,\frac{\pi}{2}(2ms\pm\frac{mX}{a})}{\text{ſin.}\,\frac{\pi}{2}(2s\pm\frac{X}{a})}$$

Mais puiſque $\frac{mX}{a}$ eſt un nombre infini $=\mu$ on a coſ. $\frac{\pi}{2}$ $(2ms\pm\frac{mX}{a})=\mp 1$, le ſigne ſupérieur répondant à μ impair, & l'inférieur à μ pair; l'on a de plus ſin. $\frac{\pi}{2}$ $(2s\pm\frac{X}{a})=\pm$ ſin. $\frac{\pi X}{2a}$, donc l'expreſſion précedente ſe réduit à $\pm\frac{mdxY}{2a}$, ou bien puiſque $a=mdx$ elle

devient

devient $\pm \frac{Y}{2}$, où Y eſt l'ordonnée qui répond l'abſciſſe X, ſavoir à l'abſciſſe $= \pm (x + \frac{aHt}{T} - 2sa)$ dans le premier état du ſiſtème, d'où l'on voit que cette ordonnée doit toujours être priſe avec le même ſigne que toute la quantité $x + \frac{aHt}{T} \pm 2sa$. Que l'on dénote cette ordonnée par $\varphi.\ (\pm [x + \frac{aHt}{T} - 2sa])$; & que l'on dénote de même par $\varphi.\ (\pm [x - \frac{aHt}{T} - 2sa])$ celle qui répond à l'abſciſſe $\pm (x - \frac{aHt}{T} - 2sa)$, & qu'on faſſe ſur la ſeconde partie de l'expreſſion générale de y, des opérations ſemblables à celle qu'on a pratiqué ſur la premiére, on trouvera enfin

$$y = \frac{\varphi.\ (\pm [x + \frac{aHt}{T} - 2sa]) + \varphi.\ (\pm [x - \frac{aHt}{T} - 2sa])}{2}$$

39. Soit (Fig. 5.) AB l'axe, & AeB la courbe qui repréſente le premier état du ſiſtème dans le cas où le nombre des corps mobiles eſt infini, on trouvera la figure de cette courbe pour un tems quelconque t, en ordonnant à une abſciſſe quelconque x la quantité y égale à la moitié de la ſomme des appliquées qui répondent aux abſciſſes $\pm (x + \frac{aHt}{T} - 2sa)$, & $\pm (x - \frac{aHt}{T} - 2sa)$ dans cette premiére courbe donnée. A' l'égard des ſignes ambigus, & du nombre indéterminé s, on remarquera, que puiſque l'axe AB eſt d'une longueur donnée a, il faut que les abſciſſes qu'on y doit prendre ne ſurpaſſent pas la quantité a, & de plus qu'elles ſoient toujours poſitives, & ces conditions ſuffiront pour déterminer tout-à-fait chacune des abſciſſes en queſtion.

Si

Digitized by Google

Si $x + \frac{aHt}{T}$ eſt moindre que a, on ſuppoſera $s = o$, & on prendra le ſigne $+$, & l'ordonnée ſera poſitive.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ eſt plus grand que a mais moindre que $2a$, on fera $s = 1$, & on prendra le ſigne $-$, l'on aura donc l'abſciſſe $= 2a - x - \frac{aHt}{T}$, & l'ordonnée devra être priſe négative.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ devient plus grand que $2a$ mais moindre que $3a$, on fera $s = 1$; & on prendra le ſigne $+$, l'abſciſſe ſera donc dans ce cas $x + \frac{aHt}{T} - 2a$, & l'ordonnée devra être de nouveau poſitive.

Si $x + \frac{aHt}{T}$ ſe trouve plus grand que $3a$ mais moindre que $4a$, on fera $s = 2$, & on prendra le ſigne $-$, ainſi l'abſciſſe deviendra $4a - (x + \frac{aHt}{T})$ & l'ordonnée correſpondente devra être priſe négativement, & ainſi de ſuite.

Par un raiſonnement ſemblable, on trouvera que lorſque $x - \frac{aHt}{T}$ eſt poſitif, l'on doit faire $s = o$; & qu'il faut emploier le ſigne $+$, ce qui donne l'ordonnée poſitive.

Si $x - \frac{aHt}{T}$ devient négatif mais moindre que a, on ſuppoſera $s = o$, & on prendra le ſigne $-$; l'on aura ainſi l'abſciſſe poſitive $-(x - \frac{aHt}{T})$ & l'ordonnée devra être priſe négativement.

Si

Si $x - \frac{aHt}{T}$ étant négatif eſt encore plus grand que $2a$ mais moindre que $3a$, on ſera dans ce cas $s = -1$; & on prendra le ſigne $-$, ainſi l' on obtiendra l' abſciſſe poſitive $-(x - \frac{aHt}{T}) - 2a$, & l'ordonnée devra être priſe négativement.

Si $x - \frac{aHt}{T}$ devient plus grand que $3a$ mais moindre que $4a$, on continuera à faire $s = -2$, & on prendra de nouveau le ſigne $+$, ce qui donnera l'abſciſſe poſitive $4a + x - \frac{aHt}{T}$, & l'ordonnée devra être encore poſitive; & ainſi de ſuite.

L'on voit aſſés par tous ces cas particuliers que nous venons de développer, que quelle que ſoit la longueur de l'abſciſſe, il ſera toujours poſſible de la réduire en ſorte qu'elle ne ſurpaſſe plus l'axe donné *AB*. On pourra ſimplifier encore cette réduction, en ſuppoſant que les abſciſſes données, ſoient repliées (pour ainſi dire) ſur l'axe une, ou pluſieurs fois, ſelon qu'elles ſe trouvent plus, ou moins excédentes, & les ordonnées devront enſuite être priſes alternativement poſitives, & négatives ſelon les loix ci-deſſus établies. Mais ſi l'on veut avoir une conſtruction tout-à-fait ſimple & générale, on pourra la déduire aiſément de la maniére ſuivante (Fig. 10.). Aiant tracé la courbe initiale *ANB* qu'on repéte ſa deſcription de part & d'autre à l'infini, en la poſant alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe, de ſorte que les mêmes branches ſoient liées entr'elles par les mêmes extrémités. Conſidérant la courbe ainſi engendrée comme une courbe unique & continue, on prendra dans l'axe *AB* qui s'étend à l'infini de part & d'autre toutes les abſciſſes qu'on voudra, ſans s'embarraſſer qu'elles ſoient négatives, ou plus grandes

que

que a, ainſi la demiſomme des ordonnés qui ſe trouveront répondre aux abſciſſes $x + \frac{aHt}{T}$, & $x - \frac{aHt}{T}$, quelle que ſoit la valeur de x & de t, donnera toujours la vraie ordonnée qui convient à l'abſciſſe x après le tems t.

40. Nous avons ſuppoſé $H = \sqrt{(\frac{2Eh}{aS})}$ (art. 35.) Or dans le cas de la corde vibrante E exprime le poid qui tend la corde a ſa longueur, & S ſon poid total; (art. 9. & 35.), on aura donc $H^2 = \frac{T^2c}{a^2}$ (art. 12.), & par conſéquent $\frac{aH}{T} = \sqrt{c}$; & les ordonnées, dont on doit prendre la demiſomme répondront aux abſciſſes $x + t\sqrt{c}$, & $x - t\sqrt{c}$. Nous aurons donc par ce moien la conſtruction de la figure que forme une corde tendue pour un tems quelconque t en cas qu'elle ait été d'abord forcée de prendre une figure quelconque donnée, & qu'enſuite on l'ait relaché tout-à-coup, & cette conſtruction eſt évidemment la même que Mr. Euler a inventée ſur la même hypothèſe.

Voila donc la théorie de ce grand Géomètre miſe hors de toute atteinte, & établie ſur des Principes directs & lumineux, qui ne tiennent en aucune façon à la loi de continuité que demande Mr. D'Alembert; voila encore comment il peut ſe faire que la même formule qui a ſervi pour appuier & démontrer la théorie de Mr. Bernoulli ſur le mélange des vibrations iſocrones, lorſque le nombre des corps mobiles étoit finis, nous en dévoile l'inſuffiſance dans le cas où le nombre de ces corps devient infini. En effet le changement que ſubit la formule en paſſant d'un cas dans l'autre, eſt tel que les mouvemens ſimples qui compoſoient les mouvemens abſolus de tout le ſiſtème s'annéantiſſent pour la plus part, & que ceux qui reſtent

ſe

Digitized by Google

ſe défigurent & s'altérent de façon qu'ils deviennent abſolument méconnoiſſables. Il eſt vraiment facheux qu'une théorie auſſi ingénieuſe, & qui auroit pû ſans doute jetter des grandes lumiéres ſur des matiéres également obſcures qu'importantes, ſe trouve démentie dans le cas principal qui eſt celui, auquel ſe rapportent tous les petits mouvemens réciproques qui ont lieu dans la nature.

41. Si l'on veut que la corde ſoit étendue en ligne droite au commencement de ſon mouvement, & que tous ſes points reçoivent en cet état des viteſſes quelconques, on ſuppoſera que les ordonnées à la courbe ne repréſentent plus les premiers éloignemens de points de la corde de l'axe, mais les viteſſes des mêmes points au premier inſtant; & les courbes qu'on trouvera pour les inſtants ſuivans donneront de la même maniére leurs viteſſes ſuivantes (art. 38.).

CHAPITRE VI.

Refléxions ſur les calculs précédens.

42. LA méthode que j'ai emploié dans le Chapitre III. eſt à la vérité un peu longue, & fort compliquée; cependant elle eſt, ſi je ne me trompe, l'unique qui puiſſe conduire à une ſolution directe, & générale, telle que nous nous ſommes propoſé.

Quoique l'intégration des équations différentielles s'achève fort aiſément par l'ingénieuſe méthode de Mr. D'Alembert, cependant il eſt clair qu'on eſt encore après cela beaucoup éloigné du but principal, car il s'agit de plus de tirer d'un nombre indéfini d'équations autant d'inconnues,

nues, & de les exprimer toutes par une même formule générale. La difficulté de cette opération n'à pas ſans doute échapé au ſavant Géomètre, dont nous venons de faire mention; car aiant propoſé à réſoudre le problême des mouvemens des cordes vibrantes, en les regardant comme des fils extenſibles chargés de pluſieurs petits poids, il s'eſt contenté de dire qu'on auroit toujours pû trouver leurs vibrations *à peu près*. (Voiés l'art. 44. de ſon Mémoire cité ci-deſſus).

Il ſeroit à ſouhaiter que l'Analiſe qui a réuſſi dans ce cas pût également s'appliquer à tous les autres qui dépendent de la réſolution d'un nombre indéfini d'équations différentielles toutes ſemblables entr'elles, & où les changeantes ne montent qu'à la premiére dimenſion; puiſqu'il eſt facile de démontrer que tous les petits mouvemens réciproques qui peuvent avoir lieu dans un ſiſtème quelconque de corps ſemblables, qui agiſſent les uns ſur les autres tous d'une même maniére, ſont néceſſairement contenus dans de telles équations. Nous ſerions par-là en état de ſuivre les actions de la nature de beaucoup plus près, qu'on n'a oſé le faire juſqu'à préſent.

J'ai déja tenté une ſolution générale du problême des vibrations des cordes élaſtiques, & des chaînes péſantes; mais étant maintenant fort preſſé ſur l'impreſſion de cette piéce, & aiant d'ailleurs quelques autres occupations indiſpenſables, je ne puis pas pouſſer aſſès loin ces recherches, c'eſt pourquoi je me reſerve à traiter ce ſujet dans une autre occaſion.

Au reſte ſi on ſuppoſe dans notre cas que les corps ſe meuvent dans un milieu, dont la réſiſtance ſoit proportionelle à $\varepsilon u + \alpha$, ε & α dénotant des conſtantes quelconques, la double intégration des équations différentielles réuſſira de même; & ſi les quantités ε & α ſont aſſès petites par rapport à la quantité c, on pourra encore

achever

achever le calcul par un procédé ſemblable à celui que nous avons expoſé plus haut. Cette Analiſe pourroit être à la vérité de quelque utilité dans la recherche de la diminution du ſon, mais ce ſeroit s'écarter trop de l'objet principal que de la vouloir expoſer ici tout au long.

43. La conſtruction que nous avons trouvé dans le chapitre précédent pour le cas, où le nombre des corps mobiles eſt infini, eſt fondée entiérement ſur ce qu'une ſuite infinie de produits de deux ſinus, dont les Arcs croiſſent en progreſſion arithmétique eſt toujours égale à zero, excepté dans le cas, où les ſinus devenant égaux la ſuite donnée ſe change en une ſuite des quarrés des mêmes ſinus. Quoique cette vérité découle immédiatement de la formule, que nous avons trouvé pour exprimer la ſomme d'une telle ſuite, cependant comme c'eſt-là un des points principaux de notre Analiſe, il ne ſera pas hors de propos de démontrer encore la même propoſition d'une autre maniére, qui ſoit & plus directe, & plus lumineuſe.

Soit propoſée la ſuite infinie

$$\text{ſin.}\ \phi \times \text{ſin.}\ \theta + \text{ſin.}\ 2\phi \times \text{ſin.}\ 2\theta + \text{ſin.}\ 3\phi \times \text{ſin.}\ 3\theta + \&c.$$

ſi l'on développe chaque terme par les téorèmes de la multiplication des angles, on aura les deux ſèries

$$\frac{\text{coſ.}\ (\phi - \theta) + \text{coſ.}\ 2(\phi - \theta) + \text{coſ.}\ 3(\phi - \theta) + \&c.}{2}$$

$$- \frac{\text{coſ.}\ (\phi + \theta) + \text{coſ.}\ 2(\phi + \theta) + \text{coſ.}\ 3(\phi + \theta) + \&c.}{2}$$

dont chacune eſt ſommable par la théorie des progreſſions géométriques. Suppoſons pour ſimplifier le calcul, que la ſerie dont on veut prendre la ſomme ſoit généralement coſ. x + coſ. $2x$ + coſ. $3x$ + &c. On réduira d'abord chaque terme aux expreſſions immaginaires exponentielles, ainſi l'on obtiendra

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}} + e^{3x\sqrt{-1}} + \&c.}{2}$$

$$+ \frac{e^{-x\sqrt{-1}} + e^{-2x\sqrt{-1}} + e^{-3x\sqrt{-1}} + \&c.}{2}$$

ces deux ſuites traitées comme deux progreſſions géométriques infinies, ſe changent par les règles connues en $\frac{e^{x\sqrt{-1}}}{2(1-e^{x\sqrt{-1}})} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}}}{2(1-e^{-x\sqrt{-1}})}$, & réduiſant au dénominateur commun $\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} - 2}{2(2-e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}})}$, ſavoir $\frac{\text{coſ.}\, x - 1}{2(1-\text{coſ.}\, x)} = -\frac{1}{2}$, & telle eſt la valeur d'une ſuite quelconque infinie de coſinus, dont les Arcs croiſſent en progreſſion arithmétique. En appliquant ceci à notre cas, on trouvera la ſomme des deux ſuites données $= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$, quelles que ſoient les valeurs des angles φ, & θ. Cependant lorſque $\theta = \varphi$, il eſt clair que les deux ſeries ſe réduiſent à $\frac{1+1+1+1+\&c.}{2}$ $- \frac{\text{coſ.}\, 2\varphi + \text{coſ.}\, 4\varphi + \text{coſ.}\, 6\varphi + \&c.}{2}$ Si $m-1$ eſt le nombre des termes dans chacune de ces ſuites, la ſomme de la première eſt néceſſairement $= \frac{m-1}{2}$, la ſomme de la ſeconde eſt par ce que nous avons trouvé ci-deſſus $= -\frac{1}{2}$, donc la ſomme de toutes deux ſe trouvera dans ce cas $= \frac{m-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$.

44. Mais dira-t-on comment peut il ſe faire, que la ſomme de la ſuite infinie, coſ. x, + coſ. $2x$, + coſ. $3x$, + &c. ſoit toujours $= -\frac{1}{2}$, puiſque dans le cas de x $= 0$,

$= 0$, elle devient néceſſairement égale à une ſuite d'autant d'unités; je répons que cela provient des termes qui ſe détruiſent naturellement dans tous les cas excepté dans celui, où $x = 0$. Pour rendre la choſe plus ſenſible cherchons la ſomme de la ſuite, coſ. x + coſ. $2x$ + coſ. $3x$ + &c. + coſ. mx; on trouvera par la même méthode ci-deſſus qu'elle eſt égale à

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{(m+1)x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{x\sqrt{-1}})} + \frac{e^{-x\sqrt{-1}} - e^{-(m+1)x\sqrt{-1}}}{2(1 - e^{-x\sqrt{-1}})}$$

expreſſion qui ſe réduit à $\frac{\text{coſ. } x - 1 + \text{coſ. } mx - \text{coſ. } (m+1)x}{2(1 - \text{coſ. } x)}$

$= \frac{\text{coſ. } mx - \text{coſ. } (m+1)x}{2(1 - \text{coſ. } x)} - \frac{1}{2}$. Or dans le cas où m eſt un nombre infini, l'on ſuppoſe que l'1 évanouiſſe auprès d'm, d'où le terme coſ. $(m+1)x$ devient = coſ. mx, & la formule $\frac{\text{coſ. } mx - \text{coſ. } (m+1)x}{2(1 - \text{coſ. } x)}$ reſte $= 0$; mais lorſque $x = 0$ le dénominateur devient auſſi égal à zero; c'eſt pourquoi elle reçoit une valeur donnée qu'on trouvera par la différentiation du numérateur & du dénominateur. On a donc en différentiant

$\frac{(m+1) \times \text{ſin. } (m+1)x - m \text{ ſin. } mx}{2 \text{ ſin. } x}$ qui ſe réduit de nouveau à $\frac{0}{0}$ par la ſuppoſition de $x = 0$; qu'on différentie une ſeconde fois, il en viendra

$\frac{(m+1)^2 \times \text{coſ. } (m+1)x - m^2 \times \text{coſ. } mx}{2 \text{ coſ. } x}$, & faiſant $x = 0$, $\frac{(m+1)^2 - m^2}{2} = m + \frac{1}{2}$; donc la valeur de la ſerie eſt dans ce cas $= m + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = m$ préciſément comme l'on a vû plus haut.

Au reſte par la méthode de ſommer les ſuites des coſinus, ou ſinus, que nous venons d'expliquer, on trouvera que la ſuite finie, $\text{ſin.}\ \phi \times \text{ſin.}\ \theta + \text{ſin.}\ 2\phi \times \text{ſin.}\ 2\theta + \text{ſin.}\ 3\phi \times \text{ſin.}\ 3\theta + \&c. + \text{ſin.}\ (m-1)\phi \times \text{ſin.}\ (m-1)\theta$

$$\text{eſt} = \frac{\text{ſin.}\ m\phi \times \text{ſin.}\ (m-1)\theta - \text{ſin.}\ (m-1)\phi \times \text{ſin.}\ m\theta}{2(\text{coſ.}\ \phi - \text{coſ.}\ \theta)}$$

ce qui convient avec ce qu'on a trouvé (art. 38.) en faiſant $\phi = \frac{\lambda\pi}{2m}$, & $\theta = \frac{\mu\pi}{2m}$, & ſuppoſant μ un nombré entier quelconque.

45. Nous avons enſeigné dans l'art. 39. à conſtruire l'ordonnée y, & la viteſſe u, l'une dans le cas, où les viteſſes initiales V ſont $= 0$, & l'autre dans le cas, où les premiéres ordonnées Y ſont $= 0$; cependant ſi on vouloit une conſtruction générale pour tous les cas poſſibles; on pourroit la trouver moiennant les formules précédentes. Car on ſait que les expreſſions de u ne ſont autre choſe, que les différentielles de celles de y en prenant le ſeul tems t pour variable, & effaçant le dt; donc ſi après avoir réduit la premiére partie de l'expreſſion de y qui contient ſeulement les Y, par la méthode donnée (art. cité), on différentie la formule qui en réſulte, en ne regardant que le tems t pour variable, on aura la formule qui donne la valeur de la premiére partie de l'expreſſion de u, & qui contient auſſi les ſeules quantités Y. De même ſi l'on intégre par dt la formule réduite de la ſeconde partie de l'expreſſion de u, où ſe trouvent les ſeules quantités V, & qui eſt ſemblable à celle de y pour les quantités Y, comme on a vu (art. 38.) on aura la formule qui donnera la valeur de la ſeconde partie de l'expreſſion de y, qui contient de même les ſeules quantités V. Ces calculs ſont aſſès longs, & compliqués, & ils demandent d'ailleurs beaucoup de circonſpection, c'eſt pourquoi je ne fais que les indiquer ici pour montrer la route qu'on devroit

tenir

Digitized by Google

tenir pour parvenir à une réduction directe & générale des expreſſions données. Il eſt cependant viſible qu'on pourra aiſément s'en paſſer, ſi on veut ſe contenter d'une conſtruction des quantités y & u pour chaque tems t dérivée de celle qu'on a trouvé (art. 39.).

Soit donc, comme dans l'article cité, ANB la figure dont les ordonnées MN repréſentent les premiéres excurſions Y, & anb celle dont les ordonnées expriment les viteſſes initiales V. Qu'on réitère leur deſcription de part & d'autre (Fig. 10. 11.) à l'infini de la maniére enſeignée; qu'on conſtruiſe enſuite deux autres courbes infinies (Fig. 12. 13.) $A^1N^1B^1$, $a^1n^1b^1$, dont la premiére $A^1N^1B^1$ ſoit telle que chaque ordonnée M^1N^1 qui répond à l'abſciſſe $A^1M^1 = AM$ ſoit toujours quatriéme proportionelle à la ſoutangente au point N, à l'ordonnée MN, & à l'unité; & la ſeconde $a^1n^1b^1$ ait ſes ordonnées m^1n^1, égales aux aires anm, qui répondent aux abſciſſes $am = a^1m^1$. Par le moien de ces quatres courbes, que je nommerai, comme celles de Mr. D'Alembert, courbes génératrices, on aura toujours l'ordonnée y, & la viteſſe u pour chaque abſciſſe x, & pour quelque tems t que ce ſoit. Car on n'aura qu'à prendre dans la courbe ANB la demiſomme des ordonnées qui répondent aux abſciſſes $x+\frac{aHt}{T}$, & $x-\frac{aHt}{T}$; & dans la courbe $a^1n^1b^1$ la demidifférence des ordonnées qui répondront aux mêmes abſciſſes; & la ſomme totale de ces quantités ſera l'ordonnée y cherchée. De même pour la viteſſe u, on prendra dans la courbe anb la demiſomme des ordonnées qui appartiennent aux abſciſſes $x+\frac{aHt}{T}$, & $x-\frac{aHt}{T}$, & dans la courbe $A^1N^1B^1$ la demidifférence des ordonnées qui répondent aux mêmes abſciſſes, & la ſomme totale de ces quantités donnera la valeur cherchée de la viteſſe u.

Quoique

Quoique cette conſtruction ſoit entiérement fondée ſur les tangentes, & ſur la quadrature des courbes génératrices trouvées, il ne paroit cependant pas qu'elle puiſſe être ſujette aux difficultés que nous avons expoſées (art. 5.) Car, la conſtruction des courbes génératrices une fois établie, il n'eſt plus beſoin d'avoir recours aux théories du calcul différentiel & intégral, pour en déduire celles des autres courbes cherchées; puiſque on peut indépendemment de ces calculs par la ſimple conſidération des tangentes, & des quadratures, démontrer que ces courbes reſolvent le problême ſans avoir en aucune façon égard à la loi de continuité dans leurs équations.

Si l'on prend pour la courbe *ANB* la courbe initiale de la corde tendue, & que l'autre courbe *anb* repréſente les viteſſes qu'on donne à tous ſes points en la rélachant tout-à-coup, on aura de cette façon la ſolution générale du problême des cordes vibrantes telle que Mr. D'Alembert l'a eu en vuë dans l'art. XXIII. & ſuiv. ſon Mémoire. Il eſt vrai que ce grand Homme ne ceſſe d'inculquer que les expreſſions des viteſſes, & des excurſions initiales des points de la corde ne peuvent pas être données à volonté (art. XXXIV.) ce qu'il répéte encore expreſſément dans l'art. II. de ſon Addition. Mais nous avons fait voir plus haut les raiſons qui obligoient cet Auteur à penſer ainſi, & ces raiſons ceſſent d'avoir lieu dès qu'on conſidére tous les points de la corde comme iſolés dans leurs mouvemens, comme nous l'avons fait dans les calculs précédens.

CHA-

CHAPITRE VII.

Théorie des cordes de Muſique, & des Flutes.

46. Les cordes, dont on ſe ſert ordinairement pour les inſtrumens de Muſique, ſont de boïau ou d'acier, ou de cuivre; à l'égard des premiéres, elles n'ont preſque point d'autre élaſticité que celle qui eſt produite par la tenſion, mais il n'en eſt pas de même des autres, dont la roideur ſe manifeſte même, lorſque elles ſont tout-à-fait lâches. Cependant il eſt aiſé de voir que la force de cette roideur pour mouvoir la corde, doit être bien petite par rapport à celle qui nait de la tenſion, d'où il s'enſuit que nous pouvons, ſans crainte d'erreur, ſuppoſer toutes les cordes parfaitement flexibles, en tenant compte ſeulement de l'effet de la tenſion donnée. La maniére commune de les mettre en vibration, en les touchant par quelqu'un de leurs points, ſoit avec un archet, ou quelqu'autre inſtrument, conſiſte à les faire ſortir de leur état de repos, & à donner à tous leurs points des impulſions quelconques. Donc ſi l'on a une corde uniformément épaiſſe, dont la maſſe & la longueur ſoient données, & la tenſion ſoit exprimée par un poid équivalant, on pourra toujours par la théorie expoſée dans les chapitres précédens trouver le mouvement de cette corde pour un tems quelconque de quelque façon que ſes vibrations aient été d'abord produites. Mais la connoiſſance des mouvemens particuliers des cordes eſt de peu de conſéquence dans la pratique, & ce n'eſt qu'à la durée de leurs vibrations qu'il eſt important d'avoir égard, puiſque c'eſt de-là que dépend, ſelon le ſentiment généralement reçu par tous les Phyſiciens, le ton grave, ou aigu qu'elles doivent rendre.

Digitized by Google

Or ſi l' on éxamine la conſtruction des courbes génératrices expoſée (art. 45.), on s' appercevra aiſément que leur nature eſt telle, que ſi on augmente, ou qu'on diminue les abſciſſes d'un multiple quelconque de $2a$ les ordonnées correſpondantes demeurent tout-à-fait les mêmes; donc ſi l'on fait que la quantité $\frac{aHt}{T}$ qui doit être ajoutée, & retranchée de chaque abſciſſe x devienne un multiple quelconque de $2a$, on aura la valeur du tems t, après lequel la corde reprendra ſa premiére ſituation, avec les mêmes viteſſes dans tous ſes points. Ce tems ſera donc $= \frac{2sT}{H}$ quelque nombre entier poſitif qu'on poſe au lieu de s. C' eſt pourquoi le tems des oſcillations ſera toujours le même pour la même corde, & il ne dependra en aucune façon du premier ébranlement, qui peut varier à l' infini. Pour connoître plus exactement ce tems qui eſt $= \frac{2T}{H}$, on n'a qu'à remettre au lieu de H ſa valeur premiére $\sqrt{(\frac{2Eh}{aS})}$ (art. 25.), & on aura $T\sqrt{(\frac{2aS}{Eb})}$ pour le tems d' une oſcillation entiére, compoſée d' une allée, & d' une revenue, où a eſt la longueur de la corde, S ſon poid, E le poid qui eſt égal à la force de tenſion; or comme h exprime la hauteur d'où un corps péſant peut tomber librement durant le tems T (art. 6.), ſi l'on fait ce tems d' une ſeconde, on aura le tems cherché exprimé de même en ſecondes de cette façon $\sqrt{(\frac{2aS}{Eb})}$. Suppoſons que le rapport du poid de la corde, à celui qui la tend ſoit comme $a : b$, b ſera une quantité qui ne dependra que de l' épaiſſeur, & de la gravité ſpécifique de la corde; on aura donc

$\frac{S}{E} = \frac{a}{b}$, & par conſéquent la formule du tems des vibrations entiéres deviendra $= \frac{2a}{\sqrt{2bb}}$, & une oſcillation ſimple devra être cenſée d' une durée $= \frac{a}{\sqrt{2bb}}$ tout de même comme ſi la corde eut toujours fait ſes mouvemens ſelon les lois de Mr. Tailor. Cette formule a été regardée juſqu'à préſent pour vraie par tous les Auteurs qui ont écrit d' Acouſtique, parce qu'elle s' accorde entiérement avec les proportions connues des divers tons des cordes, qu'on a toujours fait dépendre de la durée de leurs oſcillations. C'eſt auſſi par cette raiſon que pluſieurs d' entr'eux ont cru qu'une corde tendue ne pouvoit reſonner à moins que ſes vibrations ne fuſſent toutes réguliéres & iſocrones comme celles des pendules; ce qui paroit ſans doute inconcevable vû qu'une même corde rend toujours le même ſon, lorſqu'elle eſt pincée, ou ébranlée de quelque façon que ce ſoit. La démonſtration que nous venons de donner peut donc ſervir à établir ces vérités généralement admiſes, ſavoir, que le ton d'une corde eſt toujours proportionel au nombre de ſes vibrations dans un tems donné, & que ce ton ſe conſerve toujours le même, tandis que la corde reſte dans les mêmes circonſtances.

47. Quoique la connoiſſance abſolue de la durée de chaque vibration dans une corde donnée ne ſoit guere d' uſage dans la pratique ordinaire, elle eſt cependant néceſſaire pour la détermination d' un ſon fixe, tel que Mr. Sauveur l' a eu en vue dans l' Hiſt. de l' Académie des Sciences de Paris pour l' année 1700. La méthode que ce ſavant Auteur a imaginée pour cela eſt à la vérité fort ingénieuſe, mais elle eſt preſque impraticable, à cauſe de l' extrème délicateſſe d'oreille qu'il faut pour apprécier

Digitized by Google

les momens des *battemens* de pluſieurs ſons, & de la grande difficulté qu'on rencontre à méſurer au juſte l'intervalle du tems qui ſe paſſe entre deux de ces *battemens* conſécutifs. Si la détermination de ce ſon fixe eſt de tant de conſéquence, comme elle l'a paru à Mr. Sauveur, je crois qu'on pourra la tirer avec plus d'exactitude, & de facilité de la formule trouvée, qui ne requiert d'autres *données* que la longueur de la corde, ſa gravité ſpécifique, & la raiſon de ſon poid à celui, par lequel elle eſt tendue. Par exemple ſi l'on veut ſelon Mr. Sauveur, que le ſon fixe rende 100 vibrations dans une ſeconde, on fera $\frac{a}{\sqrt{2bb}} = 100$, d'où b, & h étant donnés, on tirera $a = 100\sqrt{2hb}$.

48. Nous venons de voir que le nombre des vibrations d'une corde donnée eſt généralement toujours le même; il eſt cependant quelque cas particulier, où ce nombre peut être diminué, & réduit à la moitié, au tiers &c. Pour s'en convaincre on n'a qu'à reflèchir, que la corde vibrante ne revient à ſon premier état, que parceque la conſtruction des courbes génératrices eſt telle, qu'en levant, où ajoutant aux abſciſſes les tems donnés les ordonnées demeurent les mêmes. Donc ſi l'on ſuppoſe que la figure initiale de la corde participe déja à cette propriété, ſavoir qu'elle contienne deux, ou trois, ou pluſieurs ventres égaux, & diſpoſés alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe, & qu'il en ſoit de même pour la courbe des viteſſes, on verra aiſément que les courbes génératrices déduites de celles-ci rendront la corde à ſon premier état dans la moitié, le tiers &c. du tems donné. Ainſi la durée d'une oſcillation ſe reduira dans ce cas à $\frac{a}{n\sqrt{2bb}}$, où n exprime le nombre des ventres primitifs. Il n'en ſera pas de même ſi les ventres ne ſe trouvent

pas

pas égaux, & diſpoſés de la façon qu'on a dit, car il ſera toujours facile de démontrer, que les courbes réſultantes ne pourront jamais avoir les propriétés néceſſaires, afin que les vibrations puiſſent s'achever dans un tems différent de celui qui convient à la nature de la corde donnée. Mr. Euler avoit déja fait cette importante remarque pour le ſeul cas où la corde part du repos dans les Mémoires cités de l'Académie de Berlin.

49. Lorſque une corde eſt en vibration, il n'y a généralement parlant que les deux bouts qui reſtent toujours immobiles; cependant ſi l'on fait attention aux cas particuliers qu'on vient d'examiner, on voit clairement que tous les points, où la figure initiale de la corde coupe l'axe doivent néceſſairement demeurer en repos, puiſque il y a de part & d'autre des branches ſemblables ſituées alternativement au deſſus, & au deſſous de l'axe. Voions donc s'il ne pourroit pas y avoir d'autres points qui fuſſent revêtus des mêmes propriétés.

Qu'on ſe repréſente pour cela une branche entiére *AMNB* de la courbe génératrice pour la corde *AB*; & qu'on ſuppoſe qu'un de ſes points quelconque *M* doive reſter immobile. (Fig. 14.) Il eſt d'abord évident qu'elle devra couper l'axe dans ce même point, il faudra enſuite que la partie *MN* de la courbe ſoit égale & ſemblable à la partie *AM*, afin que la demiſomme des ordonnées également diſtantes de part & d'autre ſoit toujours nulle, d'où il s'enſuit qu'à moins que le point *M* ne ſoit à la moitié de l'axe *AB* le point *N* tombera hors du point *B*, & ainſi la courbe cherchée *AMNB* coupera toujours l'axe en deux points *M* & *N*. Elle ſera par conſéquent compoſée de trois parties *AM*, *AN*, & *NB*, dont les deux premiéres ſont égales par ſuppoſition, & la troiſiéme eſt encore arbitraire. Or je dis que la courbe *AMNB* doit avoir toutes ces parties égales, ſemblables, & ſituées al-

terna-

ternativement au deſſus & au deſſous de l'axe *AB*. Pour s'en convaincre, qu'on refléchiſſe, que, puiſque les branches qui ſe trouvent ſituées de part & d'autre des deux points *A* & *M* doivent être ſemblables & égales dans toute la courbe génératrice engendrée par la deſcription réitérée de celle-ci, il faut que cette courbe ait toutes ſes parties de même nature que celle qui eſt compriſe entre les points *A* & *M*, d'où il ſuit que la partie de l'axe *NB* ne peut être qu'égale à la partie *AM* ou double, ou triple &c., ou encore la moitié, ou le tiers &c. de ſorte que l'axe entier *AB* puiſſe ſe diviſer en un nombre de parties égales, & aliquotes aux deux parties données *AM* & *MB*. Et toute la courbe *AMNB* devra dans ce cas couper l'axe à chaque point de ces diviſions, & elle devra contenir de plus autant de ventres égaux correſpondans.

On conclura donc que nul point d'une corde de Muſique vibrante ne pourra demeurer en repos, à moins qu'il ne la diviſe en deux parties commenſurables entr' elles; que dans ce cas la figure initiale de la corde, & la courbe des premiéres viteſſes devront néceſſairement avoir autant de branches égales & ſemblables, qu'il y aura d'unités dans les deux parties *AM*, *MB*, & qui ſeront de plus ſituées alternativement au deſſus & au deſſous de chacune des parties aliquotes, dans leſquelles tout l'axe *AB* ſera diviſé. Si donc en mettant une corde en vibration, on fait enſorte qu'un point quelconque reſte immobile, ſans empêcher que la vibration ne ſe communique, & ne s'étende de part & d'autre à toute la corde, cette corde ſe diviſera naturellement en autant des parties égales qu'il en faut pour rendre commenſurables les deux parties coupées par le point immobile. D'où il s'enſuit que, lorſque ces deux parties ſont en elles mêmes incommenſurables, il ſera impoſſible que le point de leur diviſion puiſſe jamais reſter en repos, & la corde dans

ce

Digitized by Google

ce cas ſera obligée de changer de figure d'un inſtant à l'autre, ce qui détruira néceſſairement l'iſocroniſme, & la régularité de ſes vibrations. Mais dans le cas, où le point immobile diviſe toute la corde en parties commenſurables, il ſe formera pour lors un nombre de points de repos naturels, & la corde continuera de faire des oſcillations réguliéres & iſocrones, dont la durée ne ſera que la moitié, le tiers, le quart &c. de la durée des oſcillations entiéres, ſelon que les deux parties auront pour commune méſure la moitié, le tiers, le quart &c. de toute la corde, comme on l'a démontré (Art. 48.).

Par un ſemblable raiſonnement, on trouvera que ſi les points ſuppoſés immobiles coupent la corde en un nombre de parties quelconques elle ſe diviſera en autant de parties égales qu'il en faudra, pour que chacune d'elles méſure exactement chacune des premiéres parties coupées; par conſéquent ſi ces parties ſont entr'elles incommenſurables, les mouvemens de la corde deviendront irréguliers, pendant que dans tout autre cas les vibrations s'achéveront dans un téms proportionel réciproquement à celui des ventres naturels de la corde.

50. On s'eſt apperçu depuis long-tems qu'une corde pouvoit rendre dans certaines circonſtances des ſons aigus qui différoient plus, ou moins du ſon naturel, & on a même reconnu que ces ſons n'étoient preſque jamais que l'octave au deſſus, l'octave de la quinte, & la double octave de la tierce.

Mr. Sauveur qui a fort bien traité cette matiére dans ſon ſiſtème général d'Acouſtique, imprimé parmi les Mémoires de l'Académie Royale de Paris pour l'année 1701. s'eſt appliqué le premier, que je ſache, à découvrir la véritable origine de ces divers ſons rendus par une même corde qu'il appelle ſons harmoniques; il prend (Fig. 15.) pour cela une corde d'une longueur quelconque qui étant

pincée

pincée à vuide forme des vibrations ſimples & uniques qui rendent le ſon naturel de la corde qu'il nomme ſon fondamental ; il diviſe enſuite cette corde en un nombre de parties égales, & mettant un chevalet mobile, ou un autre obſtacle quelconque leger, au premier point marqué des diviſions, de ſorte que le mouvement qu'on donne à la corde puiſſe ſe communiquer de part & d'autre, & que l'obſtacle poſé ne faſſe d'autre effet que d'obliger le point, où il eſt appliqué, à reſter toujours en repos, cet Auteur obſerve que ſi l'on ébranle la corde dans cet état, elle ſe diviſe naturellement par une eſpèce d'ondulation en autant de ventres égaux, dont les extrémités qui reſtent immobiles répondent préciſément aux points marqués des diviſions ; car aiant mis ſur la corde divers morceaux de papier, il trouve, que ceux qui ſont ſur les neuds ne ſont point du tout déplacés, les autres au contraire tombent auſſi-tôt que la corde commence de ſe mouvoir. Mr. Sauveur compare de plus les ſons harmoniques produits par une telle corde avec les ſons naturels d'autres cordes ſemblables, & il reconnoit que la longueur de celles-ci doit toujours égaler celle de la partie de la corde donnée qui eſt interceptée entre le chevalet & le bout plus proche. Il en eſt de même ſi le chevalet eſt placé à la ſeconde, troiſiéme &c. diviſion, & en général la corde forme toujours autant de neuds immobiles à égale diſtance les uns des autres qu'il en faut pour que le chevalet réponde à un d'eux, & le ſon rendu eſt toujours ſemblable au ſon que produiroit une des parties de la corde compriſe entre deux des points de repos naturels. Que ſi le chevalet diviſe la corde en deux parties incommenſurables, la corde ne fait pour lors que fremir, ſans réſonner, & l'on n'entend qu'une eſpèce de bruit confus & deſagréable à l'oreille.

51. L'on

L'on ſait qu'en prenant le ſon d'une corde pour fondamental ſa moitié rend l'octave au deſſus, ſon tiers rend l'octave de la quinte, ſon quart rend la double octave du ſon fondamental, & la cinquiéme rend la double octave de la tierce; les autres diviſions ne forment plus que des diſſonances avec le ſon principal, à moins qu'elles ne donnent des octaves de ceux-ci. D'où il s'enſuit que l'on ne peut tirer d'une même corde d'autres ſons harmoniques que la quinte, ou la tierce, en omettant les octaves qui peuvent être regardées comme des repétitions de leurs ſons principaux. Ainſi la trompette marine qui eſt compoſée d'une ſeule corde, à laquelle on applique le doigt en la faiſant réſonner avec un archet, ne produit jamais d'autres ſons que ceux qu'on vient de nommer, & le doigt tient lieu de l'obſtacle leger qui diviſe les vibrations de toute la corde.

L'on a encore heureuſement appliqué cette théorie à toutes les eſpèces de violons, où par le moien d'une légère preſſion de doigt on produit des ſons harmoniques très agréables à l'oreille, & qui s'approchent beaucoup du ſon des flutes; on pourroit même, je crois, avec beaucoup d'exercice parvenir à exécuter ſur le violon une piéce quelconque de Muſique par des ſons toujours harmoniques, car pour en tirer tous les ſons néceſſaires, il ne s'agiroit que d'ajuſter ſur les cordes deux doigts, dont l'un fut appuié fortement ſur le manche, comme on le fait ordinairement, en appliquant en même tems l'autre au tiers, ou à la cinquiéme de la corde pour lui donner le ſon harmonique convenable. C'eſt aux habiles Muſiciens à juger ſi l'exécution de ce projet n'eſt pas ſujette à d'autres difficultés capables de rebuter les meilleurs Artiſtes.

52. Nous avons fait voir dans l'art. 9. que les mouvemens des parties de l'air qui compoſent une fibre élaſtique

ſtique continüe, ne différent nullement de ceux des cordes vibrantes, ſi ce n'eſt en ce que les vibrations de celles-ci ſont perpendiculaires à l'axe, au lieu que les autres ſont longitudinales. Donc ſi l'on conſidére une fibre quelconque d'air, ou bien un amas de pluſieurs fibres renfermées dans un tuïau qui les borne, & les diſtingue de la maſſe continue de l'air extérieur, ces fibres pourront recevoir dans toutes leurs parties des mouvemens ſemblables à ceux des points d'une corde de Muſique d'égale longueur & d'égal poid, & dont la force de tenſion ſoit équivalente à celle de l'élaſticité naturelle de l'air. Si donc les mouvemens de ces fibres peuvent ſe communiquer à l'air extérieur, il en réſultera un ſon qui ſera de même nature qui celui qui ſeroit produit par la corde correſpondante.

Voila le principe, & l'origine de tous les inſtrumens à vent, qui conſtituent une claſſe d'inſtrumens de Muſique non moins étendue, & non moins importante que celle des inſtrumens à cordes.

Le célèbre Mr. Euler a tâché le premier de raprocher les théories de ces deux eſpèces d'inſtrumens dans une Théſe ſur le ſon imprimée à Bâle l'année 1727., & puis dans ſon excellent traité de Muſique qui a paru l'année 1739. Il compare en effet dans ces endroits la colomne d'air contenue dans un tuïau à une corde du même poid, & de même longueur, & qui ſeroit tendue par un poid égal à celui d'un cilindre de mercure, dont la baſe fut la même que celle du tuïau, & la hauteur celle du Baromètre. Par cette comparaiſon il détermine le ſon que doit rendre une flute quelconque donnée, & il le trouve entiérement d'accord avec l'expérience. Il faut avoüer, que cette théorie a été portée par ce ſavant Auteur au plus haut dégré de perfection, & qu'il n'y reſtoit rien à déſirer qu'une démonſtration analitique, & tirée de

la

la nature même des mouvemens qu' il a comparé enſemble. Mais pour mettre cette importante matiére dans tout ſon jour, développons-en ici encore quelque cas particulier. Soit une flute de longueur $= a$ depuis l'embouchure juſque à l'autre extrémité, ſoit b^2 la largeur de ſa baſe, que je ſuppoſe être par tout la même; on aura par l'art. 46. la durée d'une oſcillation aérienne $= \sqrt{\frac{Sa}{2Eb}}$, où S eſt le poid de la colonne d' air contenue dans la flute, & E ſon élaſticité naturelle. Suppoſons donc k égal à la hauteur barométrique, & $1 : n$ la raiſon de la gravité ſpécifique de l' air à celle du mercure, on aura E égal au poid d' une colonne de mercure, dont la baſe eſt b^2, & la longueur $= k$; & S égal au poid d' une ſemblable colonne, dont la longueur ſoit ſeulement $= \frac{a}{n}$, d'où $\frac{S}{E} = \frac{a}{nk}$; & par conſéquent le tems d' une oſcillation ſera $= \sqrt{\frac{a^2}{2nkb}} = \frac{a}{\sqrt{2nkb}}$, ce qui fait voir que ces tems, toutes choſes d'ailleurs égales, ſont comme les longueurs des flutes, auxquelles les tons répondent comme l' expérience nous l' enſeigne en effet. Si l'on veut que la flute achéve 100 vibrations dans une ſeconde, ce qui produit le ſon fixe de Mr. Sauveur, on ſera $\frac{100a}{\sqrt{2nkb}} = 1''$, d' où $a = \frac{\sqrt{2nkh}}{100}$; or nk exprime préciſément la hauteur de l' air ſuppoſé homogène qui ſe trouve à peu près $= 850 \times 32$ pieds, & h eſt de 15 pieds environ; donc $2nkh$ ſera $= 850 \times 32 \times 30 = 816000$, dont la racine quarrée ſe trouve 903. 3.. &c. ce qui étant diviſé par 100 donne pour la longueur du tuiau 9 pieds & 33 milliemes de pied.

Il eſt vrai que Mr. Sauveur trouve d'après ſes expériences des *battemens* que le tuiau d' Orgue qui rend le

ſon fixe eſt ſeulement de 5 pieds, ce qui donneroit ſuivant la théorie environ le double des vibrations que cet Auteur a déterminé pour chaque ſeconde; mais il eſt aiſé de trouver la raiſon de cette différence ſi on refléchit que les vibrations de deux cordes ne ſont réellement concurrentes, c'eſt-à-dire commençantes en même tems, & ſe faiſant dans le *même ſens* qu'après un nombre de vibrations double de celui qui eſt porté par la nature des deux cordes données, d'où il ſuit, que puiſque les *battemens* ne conſiſtent que dans la concurrence des vibrations, le nombre déterminé par l'expérience de Mr. Sauveur ſera préciſément la moitié de ce qu'il eſt en effet, & dans ce cas les réſultats de l'expérience s'accordent aſſès bien avec ceux de la théorie.

53. Puiſque les mouvemens des parties de l'air contenu dans une flute quelconque ſont les mêmes que ceux d'une corde de Muſique correſpondante, il s'enſuit que la durée de leurs vibrations pourra de même dans certains cas particuliers devenir moindre qu'à l'ordinaire, & n'en être plus que la moitié, le tiers, le quart &c., comme nous l'avons démontré dans les cordes vibrantes, lorſqu'elles ſe diviſent en pluſieurs ventres égaux. Or ceci arrive préciſément dans les inſtrumens à vent, lorſque on augmente d'une certaine façon la force du ſoufle; car c'eſt une vérité de long-tems reconnue dans les trompettes, & dans toutes ſortes de flutes, & ſur tout dans les traverſiéres, que par un ſimple changement d'embouchure l'on obtient depuis le ſon grave, ou fondamental, ceux qui y répondent comme les nombres $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ſavoir l'octave au deſſus la douziéme, la quinziéme, & la dix-ſeptiéme majeure; car le ſon ſuivant eſt proſcrit de l'harmonie du ſon principal.

Au

Au reſte quelque fondée & plauſible que ſoit cette théorie des inſtrumens à vent, il faut pourtant avoüer qu'on ne ſauroit encore par ſon moien rendre raiſon de toutes les propriétés qu'on y obſerve, & qui regardent la forme de l'inſtrument, la largeur, & la poſition des trous. Car aiant méſuré au juſte leurs diſtances dans des bonnes flutes traverſiéres, & douces je ne les ai point trouvé tout-à-fait proportionnelles aux tons correſpondans. De plus l'on ſait que pour rendre certains tons, il faut une combinaiſon donnée de trous ouverts & bouchés ou entiérement, ou à demi ſeulement, ce qui me paroit fort difficile à expliquer par la ſimple comparaiſon des cordes vibrantes. Comme cette matiére demande un éxamen long & éxact de toutes les circonſtances qui entrent dans chaque cas particulier, & que d'ailleurs cette piéce eſt actuellement ſous preſſe, j'ai cru devoir différer ces recherches pour une autre occaſion ou, ſuivant quelques vues que j'ai déja formé, j'eſpère de pouvoir raméner aux lois de la théorie ci-deſſus établie la plûpart des bizarreries qui ſe rencontrent dans ces ſortes d'inſtrumens.

SECTION SECONDE

De la propagation du ſon.

CHAPITRE PREMIER

De la viteſſe du ſon.

54. IMaginons une fibre élaſtique compoſée d'un nombre infini m de particules d'air, dont une quelconque reçoive par l'ébranlement des parties du corps ſonore une impulſion donnée c, il s'agit de déterminer la loi ſuivant laquelle ce mouvement ſe communiquera aux autres particules de la même fibre. Soit AB (Fig. 15.) la longueur de toute la fibre $= a$, AC la diſtance de la particule C qui eſt frappée par le corps ſonore $= X$, & AD la diſtance d'une autre particule quelconque D, dont on veut ſavoir le mouvement $= x$, on trouvera par l'application des formules données (art. 35.) que la viteſſe u de cette particule ſera exprimée par une ſeule ſérie infinie, comme il ſuit

$$u = \frac{2c}{m}\Big(\text{ſin.}\,\frac{X\pi}{2a} \times \text{ſin.}\,\frac{x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\,\frac{tH\pi}{2T}$$
$$+\ \text{ſin.}\,\frac{2X\pi}{2a} \times \text{ſin.}\,\frac{2x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\,\frac{2tH\pi}{2T}$$
$$+\ \text{ſin.}\,\frac{3X\pi}{2a} \times \text{ſin.}\,\frac{3x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\,\frac{3tH\pi}{2T}$$
$$+\ \&c.\ \text{à l'infini}\Big).$$

Car tous les termes P^{I}, P^{II}, P^{III} &c. évanouiſſent par ſuppoſition, & les autres Q^{I}, Q^{II}, Q^{III} &c. ſe réduiſent

a,

Digitized by Google

à, $c \times$ ſin. $\frac{X\pi}{2a}$, $c \times$ ſin. $\frac{2X\pi}{3a}$, $c \times$ ſin. $\frac{3X\pi}{3a}$. Qu'on change maintenant le produit de ſin. $\frac{X\pi}{2a}$ par coſ. $\frac{tH\pi}{2T}$ avec les produits des ſinus & coſinus des autres angles multiples en des ſimples ſinus, & l'équation ci-deſſus deviendra

$$u = \frac{c}{m} \Big(\text{ſin. } \frac{x\pi}{2a} \times \text{ſin. } \Big[\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}\Big]\frac{\pi}{2} + \text{ſin. } \frac{2x\pi}{2a} \times \text{ſin. } \Big[\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}\Big]\frac{2\pi}{2} + \text{ſin. } \frac{3x\pi}{2a} \times \text{ſin. } \Big[\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}\Big]\frac{3\pi}{2} + \text{\&c. à l'infini}$$

$$+ \text{ſin. } \frac{x\pi}{2a} \times \text{ſin. } \Big[\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}\Big]\frac{\pi}{2} + \text{ſin. } \frac{2x\pi}{2a} \times \text{ſin. } \Big[\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}\Big]\frac{2\pi}{2} + \text{ſin. } \frac{3x\pi}{2a} \times \text{ſin. } \Big[\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}\Big]\frac{3\pi}{2} + \text{\&c. à l'infini} \Big).$$

On démontrera ici de la même maniére que nous avons fait (art. 38.) ſur des formules ſemblables, que ce deux ſuites infinies ſont toujours égales à zero, excepté dans le cas, où $\frac{X}{a} + \frac{Ht}{T}$ dans la premiére, & $\frac{X}{a} - \frac{Ht}{T}$ dans la ſeconde deviennent $= \pm \left(\frac{x}{a} + 2s\right)$, s dénotant un nombre quelconque entier poſitif, ou négatif; d'où il s'enſuit que la viteſſe u dans chaque particule ne ſera, pour ainſi dire, qu'inſtantanée, & qu'elle n'obtiendra jamais aucune valeur réelle, que lorſque $\frac{X}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm \left(\frac{x}{a} + 2s\right)$ quels que ſoient les ſignes qu'on y veuille prendre.

Cette

Digitized by Google

Cette équation contient comme on le voit un certain rapport entre les eſpaces x, & les tems t, les autres quantités X, a, H, T, S demeurant conſtantes. Elle contiendra donc la loi générale, ſuivant laquelle ſe fait la propagation du ſon.

55. Pour développer cette importante matiére autant qu'il eſt poſſible, imaginons que la particule D qui reçoit ſon petit mouvement inſtantané au bout du tems t ſoit éloignée par $DC = z$ de la premiére particule C qui a reçu l'impulſion extérieure; l'on aura donc $AD = x = z + X$, laquelle valeur ſubſtituée dans l'équation ci-deſſus donnera $\frac{X}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm \left(\frac{X+z}{a} + 2s\right)$, & multipliant par a, & tranſportant les termes $\pm \frac{Hat}{T} = z + 2sa$, ou bien encore $\pm \frac{Hat}{T} = -(2X + z + 2sa)$; & ces deux équations ſatisferont toujours également en prenant les ſignes ambigus comme on voudra. Or puiſque le tems t doit toujours être poſitif l'ambiguité des ſignes tombera néceſſairement ſur la quantité z qui pourra par conſéquent avoir des valeurs poſitives, & négatives, d'où il ſuit que le ſon partant du point C ſe propagera également de part & d'autre vers A & vers B. De plus il eſt viſible par ces formules que la communication du mouvement d'une particule à l'autre ſera toujours uniforme, & qu'elle ſe fera avec une viteſſe qui ne dependra en rien de la premiére viteſſe e imprimée extérieurement, puiſque l'expreſſion de cette viteſſe ne ſe rencontre nulle part dans la formule trouvée. Voici donc les lois que les ſons doivent toujours ſuivre dans leur propagation.

Une particule quelconque d'air ébranlée par le mouvement d'oſcillation d'un corps ſonore mettra en mouvement

vement les particules circonvoiſines, & celles-ci les autres qui les ſuivent dans les fibres rectilignes, qui partent toutes du même point comme d'un centre commun; ces mouvemens dans chaque particule ſeront inſtantanés, & ſe communiqueront toujours avec une même viteſſe conſtante, quelle que ſoit l'impulſion que la premiére particule ait reçu, d'où dépand la force, où la foibleſſe du ſon. Ce n'eſt donc pas par une eſpèce d'ondulation que le ſon ſe propage, comme l'ont cru juſqu'ici tous les Phyſiciens d'après Mr. Newton; en effet l'on a fait voir dans l'Introduction que cette hypothèſe eſt inſuffiſante pour en expliquer les principaux phénomènes, & qu'elle eſt, outre cela, ſujette à beaucoup d'autres difficultés qui la rendent tout-à-fait inſoutenable.

On voit de-là que le nombre des coups d'air qui viennent frapper nos organes, doit néceſſairement répondre au nombre des vibrations des particules des corps ſonores. Donc puiſque dans les cordes de Muſique, la durée de leurs vibrations ne dépand que de leur nature, & nullement des ébranlemens extérieurs, on a la raiſon pour laquelle chaque corde rend généralement toujours le même ton quelle que ſoit la maniére avec laquelle on la mette d'abord en vibration, ce ton ne dépandant que de la groſſeur, de la longueur, & de la tenſion de la corde, comme on le ſavoit déja d'après la ſeule expérience. On appliquera encore le même raiſonnement au flutes, dont les mouvemens ont été prouvés ſemblables à ceux des cordes vibrantes. Et ſi on veut juger par analogie, on pourra l'étendre à tous les autres corps ſonores qui ont lieu dans la nature, & dont les oſcillations ne paroiſſent pas ſuſceptibles d'une juſte eſtimation analitique.

56. Mais pour retourner à notre formule: l'on a poſé (art. 35.) $H = \sqrt{\left(\frac{2Eh}{Sa}\right)}$, par conſéquent on aura Ha

m =

$= \surd(\frac{2Eah}{S})$; & faiſant les mêmes ſuppoſitions de l'art. 52. on trouvera $Ha = \surd 2nkh$; par ce moien on aura $\pm \frac{t\surd 2nkh}{T} = z + 2sa$; $\pm \frac{t\surd 2nkh}{T} = -(2X + z + 2sa)$, d'où l'on tire par la différentiation $\pm \frac{dt\surd 2nkh}{T} = \pm dz$, ſavoir $\pm \frac{dz}{dt} = \frac{\surd 2nkh}{T}$, qui eſt l'expreſſion de la viteſſe abſolue du ſon, ſoit qu'il ſe propage de C vers B, ou de C vers A.

On peut évaluer cette expreſſion comme dans l'art. cité; mais afin de la pouvoir plus commodement comparer avec les formules déja connues, il ſera utile de la réduire aux méſures ordinaires des oſcillations des pendules. Soit l la longueur du pendule ſimple iſocrone, qui fait une oſcillation dans le tems T; l'on ſait qu'un corps péſant parcourt un eſpace $\frac{l}{2}$ dans un tems qui eſt à T comme le diamètre du cercle eſt à la circonférence; on aura donc ce tems $= \frac{2T}{\pi}$, & comme les eſpaces parcourus en tombant ſont comme les quarrés des tems, l'on aura de plus $h : T^2 = \frac{l}{2} : \frac{4T^2}{\pi^2}$, d'où l'on tire $h = \frac{\pi^2 l}{8}$, qui donnera $\pm \frac{dz}{dt} = \frac{\pi}{2T} \surd nkl$; c'eſt pourquoi l'eſpace parcouru par le ſon dans le tems T d'une oſcillation du pendule l ſera $= \frac{\pi}{2} \surd nkl$. Il eſt à remarquer en premier lieu que la longueur a de la fibre aérienne ne ſe trouve plus dans cette formule de la viteſſe du ſon, d'où il ſuit qu'elle doit toujours être la même, ſoit que le ſon ſe propage dans des lieux ouverts, où l'Atmoſphère peut

être

Digitized by Google

être conſidérée comme continuée à l'infini de toute part, ſoit qu'il ſe trouve renfermé dans des détroits quelconques, où les fibres aériennes ne peuvent être que d'une longueur donnée.

L'expérience eſt encore d'accord ſur ce point de l'aveu de tous les Phyſiciens; mais il y a plus: la formule que nous venons de trouver eſt la même qui avoit déja été donnée par Mrs. Newton, & Bernoulli, & dont les réſultats ſe trouvent aſſès conformes à la vérité, quoique ces deux Auteurs l'aient tiré de Principes inſuffiſans, & même fautifs, comme on l'a fait voir au commencement de cette Piéce. Pour ſe convaincre de l'identité de ces formules nous n'avons qu'à nous rapeller la *Prop.* 49. de l'art. 4., où il eſt dit que le ſon doit parcourir un eſpace égal à la circonférence du cercle, dont le rayon eſt A, ou bien nk dans le tems qu'un pendule de même longueur fait une oſcillation entiére compoſée d'un allée & d'une revenue; donc puiſque Mr. Newton ſuppoſe le mouvement du ſon uniforme, & que les tems des oſcillations des pendules ſont comme les racines quarrées de leurs longueurs, l'on aura l'eſpace $\frac{\pi nk}{2}$ parcouru par le ſon dans le tems d'une oſcillation ſimple du pendule nk à l'eſpace qu'il parcouroit dans le tems d'une ſemblable oſcillation du pendule l comme $\sqrt{nk} : \sqrt{l}$, d'où l'on tire cet eſpace $= \frac{\pi}{2}\sqrt{nkl}$ tout de même comme on l'a trouvé par nôtre calcul.

57. Les réſultats de cette formule étant aſſès connus, je ne crois pas devoir m'arrêter à les examiner. On ſait effectivement qu'elle ne donne que 979 piés pour chaque ſeconde, au lieu que les expériences moiennes donnent un eſpace de 1142. Cette différence quoique aſſès grande en elle même ne monte néanmoins qu'environ à

une dixiéme de l'eſpace total. D'ailleurs Mr. Newton expoſe dans le ſcolie à la *Prop.* 49. du ſecond Livre des Principes quelles peuvent en être les raiſons; au reſte il ne doit pas être étonnant que la théorie differe tant ſoit peu de l'expérience à l'égard des quantités abſolues; car on ſait que les expériences toujours aſſès compliquées ne peuvent jamais fournir des données ſimples, & debaraſſées de conditions étrangéres, telles que l'Analiſe pure les demanderoit.

Mr. Euler a donné à la vérité dans les endroits cités dans l'Introduction une formule plus approchante du vrai qui eſt d'une eſpace $= 4\sqrt{nkl}$; ce qui revient à 1222 piés par ſeconde dans les plus grandes chaleurs, & à 1069 dans les plus grands froids. Mais comme cet Auteur n'a pas laiſſé voir l'Analiſe qui l'a conduit à ce réſultat nous ne pouvons porter aucun jugement la deſſus. Je remarquerai ſeulement que Mr. Euler ſuppoſe, ſans le démontrer, que chaque globule d'air ſubiſſe des dilations & des contractions ſucceſſives qui ſe communiquent, ſuivant les lois de la communication du mouvement, aux particules contenues dans la même fibre avec une viteſſe conſtante, & la même pour tous les ſons ſoit forts, ſoit foibles [voiés la Théſe cité, art. 52., où il a donné pour la premiére fois la formule qu'il a enſuite repété dans la Diſſertation du Feu] ce qui peut ſervir, pour le dire en paſſant, à faire voir de combien notre théorie doit être préférable, malgré ſon inéxactitude ſur ce point.

CHA-

Digitized by Google

CHAPITRE II.

De la reflèxion du ſon, ou des Echos.

58. Nous avons trouvé dans le chapitre précédent que les lois de la propagation du ſon ſont contenues dans les deux formules générales.

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = z + 2sa$$

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = -(z + 2X + 2sa).$$

Or il y a ici trois cas à diſtinguer. 1mo Quand l'air eſt tout-à-fait libre ce qui donne $a = \infty$, & $X = \infty$; 2do Quand l'air n'eſt libre que d'un côté, par exemple quand il y a au point *A* de la fibre aérienne un obſtacle invincible qui lui ſert d'appui; dans ce cas l'on aura de même $a = \infty$, mais l'*X* qui eſt égal à *AC* ſera fini, puiſque il dénote la diſtance du corps ſonore à l'obſtacle qui eſt en *A*; 3° Quand les fibres de l'air ſont terminées des deux côtés par des obſtacles inébranlables aux extrémités *A* & *B*. L'on aura dans ce cas *a* fini, & égal à la diſtance des deux obſtacles, & *X* ſera de même fini, & exprimera la diſtance du corps ſonore au premier obſtacle *A*.

Examinons avec ſoin ces cas l'un après l'autre. Soit en premier lieu $a = \infty$, & $X = \infty$, *X* ſera un infini moindre que *a*, parce qu'on doit toujours regarder la fibre comme infinie de part & d'autre du point *C*; ainſi l'on aura $X = \frac{a}{2}$, & les deux équations ci-deſſus deviendront

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = z + 2sa$$

$$\pm \frac{t\sqrt{2nkh}}{T} = -(z + [2s + 1]a).$$

Il eſt viſible que, a étant infini, le tems t n'obtiendra des valeurs finies que dans la premiére de ces équations, & dans le cas de $s = 0$; car l'on a ici $\pm t = \frac{Tz}{\sqrt{2nkb}}$, où l'alternative des ſignes eſt néceſſaire afin que le tems t puiſſe toujours être poſitif ſoit que z ſoit poſitif, ou négatif. Donc il n'y aura dans ce cas qu'un inſtant donné, dans lequel chaque particule ſoit ébranlée; d'où il s'enſuit que dans l'air tout-à-fait libre le ſon ſera unique, & qu'on ceſſera de l'entendre dès que le corps ſonore aura fini ſes vibrations.

59. Suppoſons en ſecond lieu a infini & X fini, on tirera des valeurs finies de t des deux formules générales en poſant $s = 0$; la premiére nous donnera $\pm t = \frac{Tz}{\sqrt{(2nkb)}}$; & la ſeconde $\pm t = -\frac{T(z+2X)}{\sqrt{(2nkb)}}$ Chaque particule ſera donc ébranlée deux fois de ſuite; le premier ébranlement arrivera comme dans le cas précédent, le ſecond lui ſuccédera après un intervalle de tems fini, qui dépendra des deux diſtances X & z. Donc quand il ſe trouve un obſtacle quelconque qui peut terminer les fibres aériennes d'un côté, il ſe formera une répétition du même ſon, laquelle ſera diſtinguée du ſon primitif ſi l'intervalle du tems entre l'un & l'autre ne ſe trouvera pas moindre d'une quinziéme de ſeconde, qui eſt le moindre eſpace requis pour que l'oreille puiſſe appercevoir diſtinctement deux ſons ſucceſſifs.

Pour méſurer au juſte cet intervalle, on diſtinguera deux cas, lorſque z eſt poſitif, & lorſqu'il eſt négatif. Dans le premier on aura $t = \frac{Tz}{\sqrt{(2nkb)}}$, & $t = \frac{T(z+2X)}{\sqrt{(2nkb)}}$, dont la différence eſt $\frac{2TX}{\sqrt{(2nkb)}}$; dans le ſecond on aura de même t

=

$= \frac{Tz}{\sqrt{(2nkb)}}$; & l'autre valeur ſera $t = \frac{T(2X-z)}{\sqrt{(2nkb)}}$ dont la différence ſe trouvera $= \frac{2T(X-z)}{\sqrt{(2nkb)}}$.

Cette différence ſera donc dans le premier cas égale au tems que le même ſon met à parcourir un eſpace $= 2X$; & dans le ſecond égale au tems qu'il lui faudroit pour parcourir l'eſpace $= 2X - 2z$. Or comme le ſon qui part du point C (Fig. 15.) ſe propage de part & d'autre, l'on concevra clairement la formation du ſon répété, ſi on imagine que celui qui eſt propagé vers A, ſoit pour ainſi dire reflechit par le point A; & qu'il retourne en arrière avec la même viteſſe; ainſi lorſque z eſt poſitif, & que l'oreille eſt en D de l'autre part de l'obſtacle, elle recevra premiérement l'impreſſion du ſon qui a parcouru l'eſpace CD enſuite elle ſera de nouveau frappée par un ſemblable ſon qui aura parcouru l'eſpace $CA + AD$, ſavoir $2CA + CD$ ce qui donne préciſément, pour la différence des tems, un tems proportionel à l'eſpace $2CA = 2X$. Au contraire ſi z eſt négatif, & que l'oreille ſoit placée en D' entre le corps ſonore, & l'obſtacle, ce ſera le même ſon qui part de C vers A qui ſe fera entendre deux fois, le premier tems repondra à l'eſpace $CD' = z$; & le ſecond à l'eſpace $CA + AD' = 2X - z$, dont l'intervalle repond au juſte à l'eſpace $2X - 2z$.

Le phénomène de la répétition du même ſon eſt un des plus connus dans la nature; on l'appelle ordinairement *Echo*, & on voit en effet qu'il eſt produit par des obſtacles quelconques qui interceptent le ſon, & l'obligent pour ainſi dire à rebrouſſer chemin, tels ſont par exemple les montagnes, les bois épais, les rochers, les cavernes, & même les nuées qui ſe trouvent à côté des corps ſonores.

60. Mais

60. Mais achevons l'éxamen des nos formules, & paſſons au troiſiéme cas, où a & X ſont deux quantités finies. Il eſt d'abord évident que les deux équations nous donneront ici une infinité de valeurs pour le tems t qui répondront à autant d'inſtans, où une même particule d'air ſera remuée. Pour les développer ſuppoſons ſucceſſivement $s = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3$ &c. on tirera de la premiére équation

$$\pm t = \frac{Tz}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(z + 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(z - 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{T(z + 4a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$\pm$ &c.

& ainſi de ſuite

La ſeconde nous donnera

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X + 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X - 2a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$$\pm t = \frac{-T(z + 2X + 4a)}{\sqrt{(2nbk)}}$$

$\pm$ &c.

On conclut de-là que quand les fibres ſonores de l'air ſont terminées des deux côtés par des obſtacles immobiles, qui en appuient & ſoutiennent les extrémités, il doit pour lors y avoir une infinité de répétitions du même ſon, ſavoir

ſavoir un Echo compoſé qui dureroit toujours ſi la conſtitution de ces fibres ne pouvoit jamais être altérée. Pour connoître la progreſſion des tems, au bout deſquels doit ſe faire une des répétitions, nous remarquerons que chacun des tems t dans les équations précédentes, eſt égal au tems que le ſon emploie à parcourir les eſpaces correſpondans $z, z + 2a, z - 2a$, *&c.* $z + 2X, z + 2X + 2a, z + 2X - 2a$ *&c.* Donc ſi l'on conſidère toujours ces eſpaces poſitifs, on pourra les repréſenter par les parties de la ligne *AB* de la maniére ſuivante.

1.re *Série.*

CD
CB + *BA* + *AD*
CA + *AB* + *BD*
CB + *BA* + *AB* + *BD*
CA + *AB* + *BA* + *AD*
& ainſi de ſuite.

2.de *Série.*

CA + *AD*
CA + *AB* + *BA* + *AD*
CB + *BD*
CB + *BA* + *AB* + *BD*
& ainſi de ſuite.

Si l'on conjoint ces deux ſéries, on en tirera ces deux-ci

CD
CB + *BD*
CB + *BA* + *AD*
CB + *BA* + *AB* + *BD*
&c.

CA + *AD*
CA + *AB* + *BD*
CA + *AB* + *BA* + *AD*
&c.

Digitized by Google

La nature & l'arrangement des termes qui compoſent ces progreſſions, fait aſſès connoître comment le même ſon qui part du corps ſonore qui eſt en *C*, doit revenir pluſieurs fois frapper l'oreille au même endroit *D*. Car on voit aiſément que la premiére de ces derniéres ſuites exprime le chemin du ſon propagé de *C* vers *B*, & reflèchi d'abord par l'obſtacle *B*, enſuite par *A*, & de nouveau par *B*, & ainſi à l'infini. Au contraire la ſeconde exprime de même les lois des allées, & revenues du ſon, qui partant du même endroit *C* ſe meut d'abord vers *A*, d'où il eſt enſuite porté vers *B*, & de-là de nouveau vers *A*, & ainſi alternativement. Et ces deux ſons achèvent pour ainſi dire leurs mouvemens dans le même eſpace *AB*, & dans le même tems ſans ſe troubler, ou s'entrempêcher en aucune façon dans leurs rencontres. Donc toutes les fois que chacun d'eux paſſera par le même point *D*, on entendra dans cet endroit une répétition, ou bien un écho du ſon primitif.

C'eſt ainſi que ſe forment les échos compoſés qui répétent pluſieurs fois le même ſon en différens tems, qui ne ſont pas toujours égaux entr'eux, ſelon que le corps ſonore, & le point d'où l'on veut entendre l'écho ſe trouvent différemment placés ſur la ligne qui joint les deux obſtacles.

§. 61. Les Phyſiciens rapportènt quelques exemples de ces échos compoſés, entre leſquels il en eſt qui répétent le même ſon plus de cinquante fois de ſuite, & on obſerve toujours qu'ils ſont produits par des murs ou des rochers, ou des autres obſtacles quelconques ſitués preſque vis-à-vis. La plûpart d'entr'eux ont cru pouvoir expliquer ces phénomènes par la théorie de la reflèxion; car diſent-ils, les particules de l'air qui eſt en vibration rencontrant des obſtacles invincibles ſont reflèchies à peu-près comme l'on concoit que le ſont les rayons de la

lumière

Digitized by Google

par les ſurfaces unies des miroirs; & cette explication paroit d'autant plus plauſible, qu'on trouve en effet par expérience que l'intervalle du tems écoulé entre deux ſons conſécutifs, eſt précisément tel qu'il le faut pour que le ſon principal puiſſe être reſléchit par les obſtacles donnés, & revenir à l'oreille.

Cependant à examiner la choſe à fond, on ſera obligé de convenir que le Principe de la refléxion, comme on la conçoit ordinairement dans le choc des corps, ou dans la lumière, eſt ici un Principe tout-à-fait illuſoire. Car l'expérience nous montre que l'écho ne dépend en rien du poli de la ſurface reſléchiſſante, puiſque il arrive que des ſurfaces en apparence polies ne produiſent point d'écho, au lieu qu'on l'entend ſouvent dans des lieux remplis de mille inégalités. En effet comment concevoir que des rochers, des forets, des nuées ſoient propres à produire dans l'air une refléxion ſemblable à celle des rayons de la lumière ſur les miroirs. Rien donc n'eſt moins fondée que cette Catoptrique des ſons que l'on a inventé pour rendre raiſon des propriétés de l'écho. Mr. D'Alembert eſt, peut-être, le premier qui aie ſenti l'inſuffiſance de cette théorie, dans l'Enciclopédie au mot *Echo*; mais ni lui, ni aucun autre que je ſache n'a jamais entrepris de donner des explications plus fondées de ce phénomène.

La théorie que nous venons de déduire de nos formules eſt, ce me ſemble, tout-à-fait à l'abris de ces difficultés; car il ne faut autre choſe pour produire l'écho, ſi non que les extrémités des fibres aériennes ſonores trouvent un appui fixe, de quelque nature qu'il ſoit; s'il n'y a qu'un obſtacle d'un côté le ſon ne ſera renvoié qu'une fois; c'eſt l'écho ſimple. S'il y en a deux qui terminent la fibre de part & d'autre les ſons ſeront renvoiés réciproquement, ce qui formera des échos compoſés qui dureront autant que la conſtitution des fibres ſonores

nores pourra ſubſiſter; ſi donc ces ſortes d'échos durent plus, ou moins, ce ſont toujours quelques circonſtances extérieures qui en ſont cauſe. Mais dira-t-on, pourquoi n'entend-on pas d'écho toutes les fois que l'air eſt renfermé entre quelques obſtacles. Les Phyſiciens ont déja répondu à cette difficulté en faiſant voir qu'il faut une certaine diſtance entre le point, d'où l'on veut entendre l'écho, & l'obſtacle qui doit le renvoier, de même qu'entre le corps ſonore, & cet obſtacle, afin qu'on puiſſe le diſtinguer du ſon primitif. Sans cela le ſon reflêchi ſe confond entiérement avec le direct, & ne fait qu'en augmenter la force, comme on l'obſerve tous les jours. Il faut de plus que l'eſpace que l'écho doit parcourir ne ſoit embaraſſé par aucun corps qui en empêche la propagation. Lorſque ces conditions auront lieu je ne doute pas qu'il n'y ait toujours des échos; la conſtruction des échos artificiels eſt appuiée ſur ces ſeuls Principes.

CHAPITRE III.

Du mélange, & du rapport des ſons.

62. JE n'ai traité juſqu'ici de la propagation du ſon que dans le cas qu'il n'y ait qu'un ſeul corps ſonore qui communique ſes vibrations aux parties contigues de l'air; il nous reſte à voir ſi les lois trouvées ont de même lieu quand pluſieurs ſons ſont excités en même tems dans divers endroits, & en quelle maniére ces ſons peuvent ſe répandre dans le même eſpace ſans ſe troubler, ou ſe confondre en aucune façon, comme nous le montre l'expérience journaliére.

Sup-

Digitized by Google

Concevons donc dans la même fibre aérienne ſonore AB (Fig. 16.) divers points phyſiques C', C'', C''', qui ſoient frappés en même tems par des corps ſonores, qui différent les uns des autres comme on voudra ; ſoient repréſentées par c^{I}, c^{II}, c^{III} *&c.* les impulſions, où les viteſſes communiquées à ces points, & que X^{I}, X^{II}, X^{III} *&c.* déſignent leurs diſtances AC', AC'', AC''' *&c.* de la premiére extrémité donnée A, on trouvera pour la viteſſe u d'un point quelconque D de la même fibre qui eſt éloignée de A par l'intervalle $AD = x$, l'expreſſion générale ſuivante.

$$
\begin{aligned}
u = \frac{2c^{\text{I}}}{m} \Big(& \text{ſin.}\, \frac{X^{\text{I}}\pi}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{tH\pi}{2T} \\
& + \text{ſin.}\, \frac{2X^{\text{I}}\pi}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{2x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{2tH\pi}{2T} \\
& + \text{ſin.}\, \frac{3X^{\text{I}}\pi}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{3x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{3tH\pi}{2T} \\
& + \textit{\&c. à l'infini} \Big) \\
+ \frac{2c^{\text{II}}}{m} \Big(& \text{ſin.}\, \frac{X^{\text{II}}\pi}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{tH\pi}{2T} \\
& + \text{ſin.}\, \frac{2X^{\text{II}}\pi}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{2x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{2tH\pi}{2T} \\
& + \text{ſin.}\, \frac{3X^{\text{II}}\pi}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{3x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{3tH\pi}{2T} \\
& + \textit{\&c. à l'infini} \Big) \\
+ \frac{2c^{\text{III}}}{m} \Big(& \text{ſin.}\, \frac{X^{\text{III}}\pi}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{tH\pi}{2T} \\
& + \text{ſin.}\, \frac{2X^{\text{III}}\pi}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{2x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{2tH\pi}{2a} \\
& + \text{ſin.}\, \frac{3X^{\text{III}}\pi}{2a} \times \text{ſin.}\, \frac{3x\pi}{2a} \times \text{coſ.}\, \frac{3tH\pi}{2a} \\
& + \textit{\&c. à l'infini} \Big) \\
+ \textit{\&c.} &
\end{aligned}
$$

Or

On ramènera ces expreſſions à la forme de celles de l'art. 54, & il viendra, comme il eſt aiſé de le voir, une ſuite de formules toutes ſemblables entr'elles, & ſemblables à celle qu'on a trouvé pour le cas d'une ſeule impulſion donnée c. Or afin de connoître ce qui arrivera, lorſque une même particule d'air ſera ébranlée par pluſieurs ſons divers; il faut chercher la valeur d'u au moment de l'ébranlement; & en ſuivant le même procédé qu'on a enſeigné, art. cité, on trouvera que chacune des expreſſions qui compoſent la valeur générale de u, ſe réduira à $\pm c^{I}$, $\pm c^{II}$, $\pm c^{III}$ &c., ſelon que le tems t répondra aux formules $\frac{X^{I}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$; $\frac{X^{II}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$; $\frac{X^{III}}{a} \pm \frac{Ht}{T} = \pm (\frac{x}{a} + 2s)$ &c., où il eſt à remarquer que l'alternative des ſignes des quantités c^{I}, c^{II}, c^{III} &c. doit répondre exactement à celle des quantités $\frac{x}{a} + 2s$.

On voit de-là que lorſqu'il n'y a qu'une de ces équations qui ſoit vérifiée, u retient la même valeur c qu'il a eu au commencement; mais quand pluſieurs ont lieu dans même tems, la valeur d'u devient compoſée des premiéres valeurs c^{I}, c^{II}, c^{III} &c. Donc puiſque chacune des équations répond, pour ainſi dire, à chacun des ſons particuliers propagés enſemble, cette propagation ſe fera toujours de la même maniére par rapport à chacun d'eux, comme s'il eut été ſeul, & il ſe communiquera d'une particule à l'autre la même impulſion qui a été produite par le corps ſonore; par conſéquent lorſque deux, ou pluſieurs ſons ſe rencontreront, la particule d'air qui ſe trouve dans leur point de rencontre recevra une impulſion compoſée des impulſions particuliéres qui conſtituent la nature de chacun d'eux; & paſſé ce moment, ils continueront

nueront leur chemin comme auparavant, tout de même comme on a vu qu'il arrive dans les échos compoſés.

63. Nous avons donc trouvé dans nos formules le développement d'un des principaux points de la théorie du ſon, qui regarde la maniére, avec laquelle l'air eſt capable de tranſmettre à l'oreille ſans mélange les impreſſions de pluſieurs ſons différens. Cette vérité qui eſt une des plus connues par expérience a cependant embaraſſé ſi fort les Phyſiciens juſqu'à préſent, que les plus habiles ont été obligés de recourir à des ſiſtèmes pour en rendre raiſon. Les principaux ſe réduiſent à deux; celui du mélange des vibrations iſocrones propoſé par Mr. Daniel Bernoulli; & celui de la différente élaſticité des particules de l'air inventé par Mr. De-Mairan. Pour ce qui eſt du premier nous en avons vu l'inſuffiſance dans le Chap. V. A l'égard de l'autre il ſuffira de remarquer que la différente nature des particules de l'air ne peut influer que ſur la viteſſe du ſon, comme il réſulte de la formule donnée (art. 56.); mais que pour ce qui eſt de leur ébranlement, il ne dépand que de la nature du corps ſonore, dont les parties frappent dans leurs oſcillations indiſtinctement toutes celles de l'air contigu. On peut voir dans l'Article *Fondamental* de l'Encyclopédie les autres raiſons qui rendent ces deux ſiſtèmes inſoutenables, c'eſt pourquoi je ne m'y arrêterai pas davantage.

64. Nous venons de voir que la particule d'air qui ſe trouve dans la rencontre de deux ſons, reçoit un ébranlement différent de celui qui eſt produit par chaque ſon en particulier; donc ſi les ſons ſont de telle nature que leurs vibrations concourrent toujours après un certain tems donné, l'impreſſion ſuivie & réguliére de ces ébranlemens compoſés pourra être diſtinguée des autres impreſſions particuliéres, & une oreille aſſès exercée entendra un troiſiéme ſon, dont le rapport avec les autres ſe trouvera en

com-

comparant le nombre des vibrations particulières, que chacun d'eux achève entre deux concurrences ſucceſſives. On devra donc entendre ce troiſiéme ſon préciſément au point de milieu de la ligne qui joint les deux corps ſonores, parceque les ſons aiant toujours une même viteſſe, c'eſt là qu'il doivent néceſſairement ſe rencontrer; cependant ſi l'on conſidère la maſſe continue de l'air, on voit que chaque particule d'une fibre ſonore doit être conſidérée comme le centre d'une infinité d'autres fibres, auxquelles elle peut auſſi communiquer du mouvement, ce qui fait que le ſon ſe propage en tous ſens; d'où il ſuit que l'ébranlement compoſé, pourra être de même porté à l'oreille dans une infinité d'autre endroits; quoique avec moins de force & moins diſtinctement à cauſe de la diminution & de l'altération cauſée par les réſiſtances des particules éthérogènes, dont toute la maſſe de l'air eſt parſémée.

Comme il faut une extrème fineſſe d'oreille pour appercevoir ces ſons compoſés, auſſi n'y a-t-il que quelques uns des plus habiles Artiſtes qui les aient reconnus. Mr. Tartini eſt le premier, que je ſache, qui ſe ſoit attaché à les examiner avec ſoin, comme on peut le voir dans ſon Traité de Muſique imprimé à Padoue l'année 1754. Ce célèbre Auteur nous apprend qu'en tirant d'un même inſtrument capable de tenue, comme les violons, les trompettes &c. deux ſons à la fois, ou bien en les tirant de deux inſtrumens éloignés l'un de l'autre de quelques pas, l'on en entend un troiſiéme qui eſt d'autant plus ſenſible, qu'on ſe rapproche de plus du point de milieu de l'intervalle donné.

Après beaucoup d'expériences ſur ce ſujet Mr. Tartini conclut que ſi l'on conſidère la ſuite des fractions $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$ &c., & qu'on ajuſte autant de ſons qui

aient

aient le même rapport entr'eux, que les termes de cette ſuite, deux ſons voiſins quelconques produiront toujours, pour troiſiéme ſon, le prémier ſon qui répond au terme $\frac{1}{2}$. Or en éxaminant la concurrence des vibrations de tous ces ſons, on trouve, qu'elle ne peut avoir lieu qu'après un nombre de vibrations égal aux dénominateur de la fraction qui exprime les ſons correſpondans; ainſi les deux ſons exprimés par $\frac{1}{5}$, & par $\frac{1}{6}$ ne deviennent concurrens, qu'après cinq vibrations du premier & ſix du ſecond, & ainſi des autres; d'où il s'enſuit qu'en comparant le nombre des concurrences au nombre des vibrations de chaque ſon particulier, le troiſiéme ſon produit par deux de la ſérie précédente devroit toujours être exprimé par 1, ce qui donne proprement l'octave de celui qui eſt réſulté à Mr. Tartini. Mais l'on ſait que la différence entre un ſon, & ſon octave eſt ſouvent inſenſible à l'oreille, par la facilité naturelle que nous avons de les confondre enſemble; donc ſi l'on ſubſtitue au troiſiéme ſon de Mr. Tartini ſon octave au deſſous; les réſultats de ces éxperiences deviendront en tout conformes à ceux que nous donne notre théorie. L'on doit être d'autant plus porté à admettre cette échange d'un ſon dans ſon octave, que Mr. Serre dans ſon Ouvrage ſur les Principes de l'Harmonie de 1753. en faiſant mention des expériences de Mr. Tartini, nous rapporte, que les troiſiémes ſons produits par des tierces majeures, & mineures, ſe trouvent preciſément à l'octave baſſe de ceux de Mr. Tartini.

Nous avons parlé plus haut de l'éxperience des *battements* de Mr. Sauveur, & nous avons vû qu'ils répondent exactement aux concurrences des vibrations; il y à

Digitized by Google

donc tout lieu de croire qu' ils ſont de même formés par la rencontre de deux ſons, & qu' ainſi leur explication dépend entierement de la théorie que nous venons de donner ; Il eſt donc vraiſemblable que le troiſiéme ſon de Mr. Tartini n'eſt produit, que par une ſuite de *battemens*, & dans ce cas il eſt très aiſé de réconnoître, que le troiſiéme ſon doit avoir avec les deux ſons primitifs le rapport que nous avons ci-deſſus établi.

Ce ſeroit ici le lieu d' examiner la nature, & la ſource des conſonances, & des diſſonances ; mais il faut avouer que, malgré les efforts, de pluſieurs habiles Muſiciens, on n' eſt pas encore parvenu à établir la-deſſus des fondemens conſtans, & généraux ; Mr. Sauveur eſt dans l' idée qu' un accord plait d' autant plus à l' oreille que ſes *battemens* ſont plus fréquens, & qu' ils reſtent pour cela moins ſenſibles ; d' où il ſuit, que les accords conſonans doivent être précifément ceux dont les vibrations ſont les plus concurrentes, & qu' au contraire les accords deviennent diſſonans, lorſque la concurrence des vibrations eſt telle, qu' elle peut aiſément être apperçue de l' oreille. Mr. Tartini tire auſſi de ſes expériences du troiſiéme ſon pluſieurs conſéquences pour la nature de l'Harmonie. Il prétend que le troiſiéme ſon eſt toujours la vraie baſſe dont les ſons particuliers ſont les deſſus ; & c' eſt ſur cela qu' il a principalement fondé ſon ſiſtème de Muſique. Quoique il en ſoit il eſt au moins certain par ce que venons de démontrer, que de quelque façon qu' on prenne la choſe, la concurrence des vibrations en eſt toujours le fondement, quoique préſenté ſous des points de vue différens ; nous verrons encore ci-après, que le Principe de l' Harmonie qu' on prétend trouver dans la nature même des corps ſonores revient encore a celui-ci.

Lorſ-

Digitized by Google

65. Lorſque les parties des corps ſonores ſont ébranlées, l' air reçoit autant d' impreſſions ſucceſſives, que ces parties font de vibrations, & ces impreſſions ſe répandent par tout ſans ſe multiplier, où ſe troubler en paſſant d'une particule d' air dans l' autre. Donc ſi le corps ſonore eſt de telle nature, que les vibrations de ſes parties commencent toutes, & s' achèvent toujours dans le même tems, l' oreille ſera frappée à la fois par pluſieurs petits coups, qui ſe ſuccederont par des intervalles de tems égaux, & cette uniformité d' impreſſions produira ce ſentiment agréable qu' on appelle *Son*; au contraire ſi les vibrations des parties du corps ſonore différent les unes des autres, c' eſt à dire qu' elles ne ſoient pas toutes d' égale durée, notre organe recevra à chaque inſtant des ébanlemens différens, & on n' entendra dans ce cas qu'un bruit confus. Cette verité qui à été de long-tems réconnue eſt une ſuite néceſſaire de ce que l' on a démontré ſur les mouvemens des cordes vibrantes, & ſur ceux des fibres élaſtiques d'air; car on éprouve tous les jours que les cordes, qui produiſent les meilleurs ſons ſont toujours celles qui ont une plus grande uniformité dans toute leur extenſion, ce qui les rend plus capables des mouvemens réguliers, & iſocrones, que nous avons determiné dans le Chap. VII. Ainſi l' explication du ſon, & du bruit que quelques Auteurs ont voulu donner en diſant que tout bruit eſt *un*, & qu' au contraire tout ſon eſt *composé*, tombe ici d' elle même, puiſqu' elle eſt tout a fait oppoſée à ce que nous venons de démontrer.

Suppoſons a préſent, que pendant qu'une corde réſonne il y ait près d' elle pluſieurs autres cordes tendues, il eſt clair que l' air ébranlé par la premiére frappera toutes les autres, & que les impulſions reçues par celles-ci répondront parfaitement a chaqu'une des vibrations de celle qu' on

 fait

Digitized by Google

fait réſonner ; donc a force de coups reitérés, elle devront de même entrer en vibration ; or puiſque la durée des vibrations des cordes eſt abſolument déterminée par la conſtitution de la corde même, il s'enſuit que ſi toutes les cordes ſont de même nature, les vibrations naiſſantes de celles, qui ſont ébranlées par l'air pur, ſeront toujours favoriſées par des impulſions continues qui procédent de la corde principale ; c'eſt pourquoi au bout d'un certain tems elles ſeront auſſi forcées de réſonner. Au contraire ſi les cordes ſont telles, que leurs vibrations ne puiſſent jamais être concurrentes, elles ſeront tantôt favoriſées, & tantôt troublées par les impulſions qui procédent de la corde principale, & ainſi il ſera impoſſible, qu' elle reçoivent jamais un mouvement ſenſible, & capable de produire le le ſon qui leur eſt propre. Suppoſons à préſent que les cordes tendues ne ſoient pas à l' uniſſon de celle qu' on fait réſonner, mais qu' elles y répondent comme nombre à nombre, il faudra ici diſtinguer deux cas ; lorſque le ſon de la corde principale eſt méſuré exactement par ceux des autres cordes, & lorſque ces ſons ſont ſeulement commenſurables entr' eux. Il eſt viſible que dans le premier de ces cas, les vibrations des cordes qu' on laiſſe en repos, ſeront toujours favoriſées par celles de la corde principale qu' on ébranle, & par conſéquent ces cordes devront de même réſonner comme ſi elles étoient à l' uniſſon ; dans l' autre cas les cordes ne pourront réſonner dans leur totalité ; car elles ſeront toujours en partie troublées, & en partie favoriſées par les vibrations de la principale ; & comme les impulſions contraires, & favorables ſont toujours uniformes, elles les forceront de prendre des figures telles, que leurs vibrations puiſſent toujours être favoriſées. Il faudra donc qu' elles ſe diviſent en pluſieurs ventres égaux, de ſorte que le ſon de chacun

Digitized by Google

de ces ventres ſoit où à l'uniſſon de celui de la corde principale, où bien, qu' il le méſure toujours exactement comme dans le premier cas. Or puiſque il n' y a rien qui rétienne fixes les noeuds formés par les ventres naturels de ces cordes, il arrivera facilement que les vibrations particuliéres ſe dérangent les unes les autres, ce qui en détruira l' uniformité, & empêchera par conſéquent les cordes de réſonner; elle ne feront donc que frémir au ſon de la principale, & ſe diviſeront, en frémiſſant, par une eſpèce d' ondulation, comme on le voit dans les ſons harmoniques.

Ce Phénomène a été obſervé par Mrs. Wallis, & Merſenne les premiers, & puis par Mr. Sauveur dans la diſſertation citée (art. 50.). Tout le monde le reconnoit aujourd' hui; & on convient généralement, que l' air ébranlé par les oſcillations d' une corde eſt celui qui met les autres en mouvement, mais il reſtoit encore à donner la raiſon pourquoi, de pluſieurs cordes frappées également par les mêmes coups d' air il n' y a que les harmoniques qui puiſſent réſonner, où frémir ſimplement. C' eſt a quoi il me paroit d' avoir entiérement ſatisfait par tout ce qui a été démontré juſqu' à préſent.

Je ſouhaiterois pouvoir expliquer de même la multiplicité des ſons harmoniques, qui ſe font ſentir en frappant une ſeule corde, tels que la douxiéme, & la dixſeptiéme, au deſſus du ſon principal. Mais j' avoue qu' après bien de réflexions, je ne ſuis pas encore parvenu a trouver ſur ce ſujet rien de ſatisfaiſant. Ayant examiné avec toute l' attention dont je ſuis capable, les oſcillations des cordes tendues, je les ai toujours trouvé ſimples, & uniques dans toute leur étendue, d' où il me paroit impoſſible de conçevoir comment divers tons peuvent être engendrés à la fois. Il ſeroit pour cela inutile de recourrir aux théo-

ries

ries dont on à fait mention (art. 63.) puiſque nous en avons deja fait ſentir le défaut. Je ſuis donc enclin a croire que ces ſons peuvent être produits par d'autres corps qui réſonnent au bruit du ſon principal, comme ont vient de le voir dans les cordes; & ce qui peut donner quelque poid à cette conjécture, c'eſt que ce mélange de ſons harmonieux n'eſt guère ſenſible, que dans les Clavecins, ou dans les autres inſtrumens montés de pluſieurs cordes.

Quoique il en ſoit je déſirerois que des perſonnes dont l'oreille fût extrèmement fine, & qui ne l'euſſent pas beaucoup exercé a entendre de la Muſique, vouluſſent bien ſe prendre la peine de répéter ces expériences ſur une ſeule corde fixée par deux chevalets ſur une ſimple table, dans des lieux ouverts de toute part; dans ce cas l'on pourroit être ſûr, que ni la prévention de l'oreille acoutumée à entendre toujours les ſons principaux accompagnés de leurs harmoniques, ni la réſonnance des corps circonvoiſins ne pourroit y avoir aucune part; & le réſultat de l'expérience déviendroit hors de toute atteinte.

Mr. Rameau, un de plus célèbres Artiſtes de nos jours, & a qui l'art Muſical eſt ſi redevable, à donné en 1750. une démonſtration du Principe de l'Harmonie fondée ſur les expériences rapportées de la réſonnance des corps ſonores. Cet Auteur croit avoir ainſi découvert dans la nature même les vrais fondemens de l'Harmonie, qu'on avoit avant lui inutilement cherché par d'autres voies; mais après tout ce que nous venons de démontrer on voit évidemment que ce Principe même tire ſon origine de celui de la concurrence des vibrations, Principe dès longtems réconnu pour la ſource des conſonnances, & des diſſonances; & ſur lequel Mr. Euler à établi ſa nouvelle théorie de Muſique dans le Traite cité (art. 52.)

Ce

Ce célèbre Géomètre à donné en effet à ce principe toute l'étendue, dont il paroit capable, & il à tâché par là de ramener a des formules aſſés ſimples, les principales règles de la Compoſition. L'on ne doit donc plus regarder le principe de Mr. Rameau que comme une nouvelle preuve de celui-ci tirée immédiatement de l'expérience; mais cet Auteur aura toujours le mérite d'avoir ſçu en déduire avec une extrême ſimplicité la plupart des loix de l'Harmonie que pluſieurs expériences détachées, & aveugles avoient fait connoître.

Au reſte quelque principe qu'on adopte pour développer la nature des conſonances, & des diſſonances il reſtera toujours à expliquer pourquoi il n'y a d'autres rapports primitifs conſonans que ceux qui ſont contenus dans les nombres 1, 3, 5; car il eſt certain qu'une corde qui ſera la ſeptième partie, où bien ſeptuple d'une autre devra réſonner dans le premier cas, & frémir ſeulement dans le ſecond tout de même comme ſi elle rendoit une douxiéme, ou une diſeptiéme, d'où il s'enſuit, que ſuivant même le Principe de Mr. Rameau on devroit regarder le rapport de 4 : 7, où bien de 7 : 8 pour conſonans, ce qui eſt néanmoins dementi par l'expérience. Mais ce qui eſt plus étonnant c'eſt, que le rapport de 8 : 9 qui conſtitue une ſeconde majeure, eſt beaucoup moins diſſonant que celui de 7 : 8, quoique les concurrences ſoient plus fréquentes dans celui-ci, que dans l'autre. Il y a la même queſtion à faire ſur pluſieurs accords, qui ne ſont pas reçus dans l'Harmonie, quoique ils contiennent moins de diſſonances que d'autres, qu'on emploie avec ſuccès. Je crois, que dans quelque ſiſtème de Muſique, que l'on veuille imaginer, l'on ne pourra éluder ces difficultés qu'en recourant au gout, & au ſentiment commun ſur leſquels l'habitude, & les préjugés ont peut être beaucoup plus de pou-

Digitized by Google

pouvoir, qu'on ne le penſe ordinairement. Mais ce n'eſt pas ici le lieu d'entrer dans des telles diſcuſſions. Le ſavant Mr. D'Alembert en a traité fort au long dans l'Article *fondamental* de l'Encyclopédie, auquel nous nous conterons de renvojer.

REFLEXIONS

SUR LES QUANTITES IMAGINAIRES

PAR M. LE CHEV. DAVIET DE FONCENEX.

1. ON rencontre ſi ſouvent des quantités imaginaires dans les expreſſions algébriques qu'il ſeroit à ſouhaiter qu'on ſe fut attaché à en examiner avec plus de ſoin la nature & l'origine. Ces recherches auroient été d'un grand ſecours dans toutes les parties de Mathématiques qu'on traite par le calcul, & on auroit évité par là beaucoup de paradoxes & de contradictions dans une Science qui en devroit être entiérement exempte. La nature du calcul introduit en effet preſque toujours dans la ſolution d'une queſtion, des cas qui lui ſont étrangers, & le problême alors quoique poſſible conduit à des équations, dont pluſieurs racines peuvent être imaginaires: ſouvent même une formule qui paroiſſoit devoir ſatisfaire entiérement à la queſtion, nous la préſente dans certaines circonſtances d'une façon abſurde & impoſſible: nous en verrons des exemples frappans dans la ſuite. Du reſte le premier cas n'a d'autre inconvénient que la difficulté de débaraſſer l'équation de ces valeurs imaginaires; mais dans le ſecond on pourroit facilement être induit en erreur par ces formules, & regarder comme impoſſible une queſtion, dont toute la contradiction conſiſte dans la maniére, dont on l'exprime algébriquement.

Souvent au contraire, parcequ'on ne peut faire entrer dans l'expreſſion analytique d'un problême toutes les conditions qui lui appartiennent; l'algèbre nous en fournit une ſolution réelle pour des cas où ces conditions le rendent impoſſible. J'en pourrois apporter beaucoup d'exemples;

mais cette matiére d'ailleurs étrangère à mon ſujet, ayant été ſuffiſamment traitée par d'autres, & particuliérement par Mr. D'Alembert dans l'Encyclopédie à l'article *Equation*, où l'on trouvera des réflexions neuves & intéreſſantes, je paſſe à examiner avec plus de ſoin l'origine des racines imaginaires qu'on trouve dans les équations élevées.

2. Il eſt d'abord évident que ſi toutes ces racines ſont imaginaires, le problême implique contradiction: mais s'il s'en trouve des réelles & des imaginaires, la queſtion ſera-t-elle en même tems poſſible & contradictoire? éclairciſſons ceci par un exemple. Qu'on ſe propoſe de trouver deux moyennes proportionelles x & y entre les quantités a & b données; les deux équations $x^2 = ay$, & $xb = y^2$ donneront en ſubſtituant dans la ſeconde la valeur de x priſe dans la premiére $y = \pm \sqrt{(b \times \pm \sqrt{ay})}$, où l'on voit que l'ambiguité des ſignes de $\pm \sqrt{ay}$ entraine dans la formule deux valeurs imaginaires pour y exprimées par $y = \pm \sqrt{(b \times - \sqrt{ay})}$. Ces valeurs de y répondroient au cas où x ſeroit négatif, circonſtance qui rendroit en effet le problême impoſſible.

Or comme en chaſſant les radicaux l'ambiguité des ſignes évanouit, il eſt néceſſaire que l'équation réduite contienne les deux cas de x poſitive & négative, & donne par conſéquent des racines réelles & imaginaires pour y ſatisfaire également. Voilà de quelle maniére la même équation appartient en même tems à un problême poſſible & à un impoſſible.

En ſuivant le même procédé on pourroit preſque toujours reconnoître (principalement dans les problêmes géométriques) quelles ſont les queſtions qu'on réſoud malgré ſoi avec celle qu'on a en vuë, & on ſe perſuaderoit aiſément que puiſqu'on n'introduit pluſieurs valeurs pour l'inconnue dans l'équation finale que par la multiplication & l'élévation aux puiſſances, on pourroit de même com-

Digitized by Google

combiner de telle façon les opérations inverſes qu'on trouva à part chaque valeur de x, qui devroit par conſéquent toujours avoir une expreſſion finie réelle, ou imaginaire.

3. Pour mettre hors de doute cette vérité qui a toujours été ſuppoſée par tous les Algébriſtes, Mr. de Bougainville dans ſon Introduction au calcul intégral, s'eſt ſervi de la conſidération d'une courbe; mais la démonſtration qu'il en tire ne me paroit ni naturelle, ni aſſès rigoureuſe: puiſque la valeur imaginaire qu'il trouve par cette méthode n'étant qu'approchée, on pourroit ſoupçonner que la quantité que l'on néglige, quelque petite qu'elle ſoit, ne fût préciſément celle qui empêcheroit qu'on ne pût exprimer l'inconnue par une expreſſion finie: & l'on eſt d'autant plus porté à former ce doute, que comme il l'a lui même fait voir d'après Mr. D'Alembert, il arrive ſouvent qu'un terme qu'on croyoit pouvoir négliger dans une ſérie, eſt cependant celui qui la fait changer de nature.

Quoiqu'il en ſoit, cette propoſition, qui comme on l'a vu, paroit être une ſuite du procédé qui nous conduit aux équations de dégré élevé, ſuffiroit pour démontrer ce théorème fameux: qu'une équation quelconque peut toujours être diviſée en facteurs réels du ſecond dégré; car il s'en ſuivroit que quelque compliquée que fût une racine quelconque de cette équation, il ne s'agiroit toujours que de diviſions ou d'extractions de racines. Or dans tous ces cas on pourra toujours par une ſimple conſtruction géométrique réduire cette expreſſion à la forme $A + B\sqrt{-1}$, où A & B ſont des quantitès réelles (voyés l'article 5.): d'où il ſuit que puiſque toute équation qui conduit à $x = A + B\sqrt{-1}$ doit donner également $x = A - B\sqrt{-1}$ (étant arbitraire de prendre les radicaux quarrés avec le ſigne + ou −) l'équation propoſée ſera diviſible par $x - A \pm B\sqrt{-1}$, & aura par conſéquent encor pour facteur le produit réel $x^2 - 2Ax + A^2 + B^2$.

 4. L'im-

4. L'importance de ce théorême exigeroit cependant qu'on en eut une démonſtration rigoureuſe, tirée de la nature même des équations: d'autant plus qu'on mettroit en même tems hors d'atteinte la propoſition de l'art. 3. Tel eſt le plan qu'a ſuivi Mr. Euler dans une excellente piéce qu'il a donné ſur cette matiére dans les Mémoires de l'Académie Royale de Pruſſe de l'année 1749. Voici la route qu'il a tenu. Qu'on réduiſe toutes les équations au dégré 2^n ce qui eſt facile par la multiplication: cela fait il eſt évident qu'il ſuffiroit de démontrer généralement qu'une équation du dégré 2^n eſt toujours diviſible réellement en deux autres du dégré 2^{n-1}; car par la même raiſon chacune de celles-ci ſe diviſeroit en deux autres du dégré 2^{n-2}, & en ſuivant ce raiſonnement on auroit cette équation diviſée en 2^{n-1} facteurs du ſecond dégré. Pour démontrer donc cette propoſition, après avoir fait évanouir le ſecond terme de l'équation, qui devient par là

$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + \&c.$ où les coéficiens B, C, D &c. ſont en nombre $2^n - 1$, qu'on ſuppoſe que les deux facteurs cherchés, ſoient

$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-3} + \&c.$$

& $$x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \mu x^{2^{n-1}-2} + \nu x^{2^{n-1}-3} + \&c.$$

où le nombre des coéficiens indéterminés eſt encore $2^n - 1$. La comparaiſon du produit de ces deux équations avec la propoſée fournit autant d'égalités, de façon que toutes les lettres α, β, μ, ν &c. ſe pourront déterminer par les connues B, C, D &c. mêlées avec l'indéterminée u, réellement ſans extraction de racine, ce qui donnera une équation pour u, dont l'expoſant ſera, comme on le ſait par

les

les combinaiſons $\frac{2^n \times 2^n - 1 \times 2^n - 2 \times 2^n - 3 \ldots \times 2^{n-1} + 1}{1.\,2.\,3.\,4.\,5 \ldots\ldots\ldots 2^n - 1}$ nombre que l' Auteur démontre pairement impair. De ce que le ſecond terme manque dans l' équation, il conclut qu'une racine quelconque p aura toujours ſa compagne $-p$, d'où il infère encore qu'on aura généralement pour facteur de cette équation $u^2 - p^2$: donc puiſque le nombre des racines eſt pairement impair, le nombre de ces facteurs doubles ſera impair, & par conſéquent, dit-il, le dernier terme de cette équation ſera négatif, ce qui ſuffiroit pour démontrer que u aura au moins deux valeurs réelles, ce qui rendroit auſſi réels tous les coéficiens α, β, μ, ν *&c.*

A l'égard de ce qu'on a dit qu'une racine p exige dans cette équation la $-p$, il ne paroit pas qu'on en puiſſe douter, puiſque l'équation qui détermine u n'appartenant pas plus à la premiére qu'à la ſeconde des équations ſuppoſées, elle doit fournir indifféremment la valeur de $+u$ & de $-u$: d'où il eſt évident non ſeulement que le ſecond terme manquera dans cette équation, mais auſſi tous les termes pairs. Mais puiſque p, p', p'', p''' *&c.* ſont les racines de l' équation, dont quelques unes peuvent étre imaginaires, & avoir un quarré négatif, on ne peut pas conclure de ce que les facteurs $u^2 - p^2$ ſont en nombre impair, que le dernier terme de leur produit ſoit eſſentiellement négatif. Il faudroit avant tout avoir démontré que le produit $p p' p'' p'''$ *&c.* de toutes les racines poſitives doit toujours être réel. Mr. Euler le trouve en effet tel pour les équations du quatriéme dégré; mais pour les autres cas il ſe contente de dire que ce produit étant déterminable par les coéficiens C, D, E il ne peut être imaginaire. On ſent bien qu' il faudroit encor qu'on fut aſſûré qu' il eſt égal à une fonction rationelle de ces coéficiens. Cette circonſtance, ſans laquelle le théorème ci-deſſus perd toute ſa force, me paroit aſſés difficile à démontrer. Pour cela cependant

dant

Digitized by Google

dant je m'étois d'abord aſſûré que les racines de l'équation étant p, p', p'', p''' &c. il ſuffiſoit de faire voir que ſi entre les combinaiſons qu'on peut faire en prenant $2^n - 1$ de ce quantités enſemble, on choiſiſſoit ſeulement celles où entroit p, & qu'on les multiplia enſemble, cela donneroit exactement le produit $p\,p'\,p''\,p'''$ &c.; mais quoique ces produits ſe préſentaſſent d'abord ſelon une loi aſſès ſimple, la difficulté que j'ai trouvé à les déduire généralement des coéficiens de l'équation propoſée m'a fait abandonner cette recherche, pour examiner ſi indépendamment des Principes que Mr. Euler avoit déja établi, on ne pourroit point démontrer la propoſition en queſtion.

5. Si on a une équation quelconque du ſecond dégré $x^2 + Ax + B = 0$, dans laquelle A & B ſoient des quantités imaginaires de la forme $a + b\sqrt{-1}$, je dis que ſes racines ſeront auſſi de la forme $c + d\sqrt{-1}$, a, b, c, d étant des quantités réelles. Qu'on réſolve l'équation propoſée, on trouvera $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{(-B + \frac{A^2}{4})}$: il eſt d'abord évident qu'on pourra réduire cette équation à $x = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$, g & h étant toujours des quantités réelles: on voit de plus que pour donner à cette expreſſion la forme cherchée $c + d\sqrt{-1}$, il ſuffiroit d'y réduire le radical compoſé $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$. Pour cela dans un cercle, dont le rayon ſoit égal à $\sqrt{(g^2 + h^2)}$ qu'on cherche un angle φ, dont le ſinus $= h$, & le coſinus $= g$, ce qu'il eſt facile de faire au moyen des tables. Le radical $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})}$ ſe changera ainſi en $\sqrt{(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſin.}\,\varphi\sqrt{-1})}$ qui eſt égal à $\text{coſ.}\,\frac{\varphi}{2} + \text{ſin.}\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}$ ce que je prouve de la maniére ſuivante. Que φ & θ repréſentent deux angles quelconques ſi l'on multi-

multiplie $coſ.\,\varphi + ſin.\,\varphi\sqrt{-1}$ par $coſ.\,\theta + ſin.\,\theta\sqrt{-1}$, on trouvera pour produit $coſ.\,\varphi \times coſ.\,\theta + coſ.\,\theta \times ſin.\,\varphi\sqrt{-1} + coſ.\,\varphi \times ſin.\,\theta\sqrt{-1} - ſin.\,\varphi \times ſin.\,\theta$, ou bien $coſ.\,\varphi \times coſ.\,\theta - ſin.\,\varphi \times ſin.\,\theta + (coſ.\,\theta \times ſin.\,\varphi + coſ.\,\varphi \times ſin.\,\theta)\sqrt{-1}$. Or l' on ſait par les Principes de la trigonométrie que $coſ.\,\varphi \times coſ.\,\theta - ſin.\,\varphi \times ſin.\,\theta = coſ.\,(\varphi + \theta)$, & que $coſ.\,\theta \times ſin.\,\varphi + coſ.\,\varphi \times ſin.\,\theta = ſin.\,(\varphi + \theta)$, on aura donc $(coſ.\,\varphi + ſin.\,\varphi\sqrt{-1}) \times (coſ.\,\theta + ſin.\,\theta\sqrt{-1}) = coſ.\,(\varphi + \theta) + ſin.\,(\varphi + \theta)\sqrt{-1}$. Si à préſent on fait $\theta = \varphi$ la formule ſe réduira à $(coſ.\,\varphi + ſin.\,\varphi\sqrt{-1})^2 = coſ.\,2\varphi + ſin.\,2\varphi\sqrt{-1}$, d' où il ſuit évidemment que $\sqrt{(coſ.\,\varphi + ſin.\,\varphi\sqrt{-1})} = coſ.\,\frac{\varphi}{2} + ſin.\,\frac{\varphi}{2}\sqrt{-1}$, puiſqu'en élevant les deux membres au quarré no a $coſ.\,\varphi + ſin.\,\varphi\sqrt{-1} = coſ.\,\frac{2\varphi}{2} + ſin.\,\frac{2\varphi}{2}\sqrt{-1}$ équation identique. Si je prens donc $m = coſ.\,\frac{\varphi}{2}$ & $n = ſin.\,\frac{\varphi}{2}$ j' aurai par la ſubſtitution $\sqrt{(g + h\sqrt{-1})} = m + n\sqrt{-1}$: expreſſion qui ajoûtée, ou levée de la quantité $\frac{A}{2}$ donnera $x = c + d\sqrt{-1}$, comme on s' étoit propoſé. Cette propoſition préparatoire à la principale que nous avons en vue pouvoit ſe déduire directement du théorème général démontré par Mrs. D' Alembert, & Euler; mais comme ils l' ont tiré du calcul différentiel, j' ai cru devoir en donner ici une démonſtration plus ſimple, afin qu'une propoſition qui appartient entiérement à l' algébre pure ne tint en aucune façon à des Principes tranſcendans, & ne dépendit que de la ſimple Géométrie.

Ce lemme poſé: ſoit une équation d'un dégré quelconque r, dont on veuille trouver les facteurs trinomes. Qu'on réſolve le nombre r en ſes facteurs ſimples, & on aura

$r =$

$r = 2^m . p . q . r . ſ$. &c. où les nombres $p, q, r, ſ$, &c. ſeront des nombres premiers, & par conſéquent impairs. Donc le produit $p . q . r . ſ$. &c. ſera un nombre impair que je nomme P.

Qu'on diviſe à préſent l'équation propoſée par une équation du ſecond degré dont le coéficient du ſecond terme, ſoit la lettre indéterminée u, & par les régles connues d'algébre on aura une nouvelle équation, où u ſera déterminée par les coéficiens de la donnée, & puiſque u doit pouvoir répréſenter toutes les combinaiſons poſſibles des racines de la premiére équation priſes deux à deux, on verra facilement par la théorie des combinaiſons, que cette équation ſera du degré $\frac{2^m . P . (2^m . P - 1)}{2} = 2^{m-1} P . (2^m P - 1)$ ſi donc $m = 1$, cette équation ſera d'un dégré impair, & aura par conſéquent une racine réelle. Que ſi m eſt plus grand que l'unité qu'on diviſe de nouveau cette équation par une autre du ſecond dégré dont le coéficient du ſecond terme ſoit u'', & qu'on faſſe pour abréger $2^m . P - 1$ qui eſt un nombre impair $= P^1$; par les mêmes raiſons, que ci-devant la lettre u' ſera donnée par une équation dont l'expoſant ſera exprimé par $\frac{2^{m-1} P . P^1 . (2^{m-1} P . P^1 - 1)}{2} = 2^{m-2} P . P^1 . (2^{m-1} P . P^1 - 2)$ Dans le cas de $m = 2$ cette équation ſera de dégré impair & aura comme on ſait une racine réelle. Si enfin m étoit encore plus grand que 2 on n'auroit qu'a pourſuivre le calcul, & il eſt évident que la m^{me} équation devra être d'un dégré impair.

On aura donc les équations ſuivantes

$$z^2 + u z + M = 0$$
$$u^2 + u' u + M^1 = 0$$
$$u'^2 + u'' u' + M^{11} = 0$$
$$u''^2 + u''' u'' + M^{111} = 0$$
&c. &c. &c.

et

Et la derniére équation ſera telle que ſon dernier terme, & le coéficient du ſecond ſeront réels; puiſque ce coéficient ſera la racine réelle de l'équation m^{me}. qui eſt, comme on l'a vû de dégré impair. (*), & que le dernier terme eſt encor, comme on le ſait, déterminable par ce coéficient, & par ceux de l'équation donnée ſans extraction de racine: ſi donc on prend une des racines de cette équation elle aura la forme $m + n\sqrt{-1}$, & ſera le coéficient du ſecond terme de l'équation qui la précéde, dont le dernier terme ſe tirera de même par de pures préparations algébriques, de ce coéficient & des données de la premiére formule, & les racines de cette nouvelle équation ſeront donc de nouveau de la forme $p + q\sqrt{-1}$. En pourſuivant la même opération on arrivera finalement à la premiére $z^2 + uz + M$, par laquelle on a diviſé la propoſée, & par un raiſonnement ſemblable à celui que nous avons fait pour les autres, on verra que u & M auront la forme $r + s\sqrt{-1}$: par conſéquent ſi on réſoud cette équation, ſes racines auront encore la forme $A + B\sqrt{-1}$: d'où il ſuit, que $z - A + B\sqrt{-1}$ ſera un diviſeur exact de l'équation donnée. Or en ſubſtituant dans celle-ci $A + B\sqrt{-1}$ au lieu de z, on trouve pour déterminer B une équation dont tous les termes impairs manquent, ce qui fait connoître que cette équation ſera également diviſible par $z - A + B\sqrt{-1}$ elle le ſera donc auſſi par le produit de ces deux racines, qui eſt le trinome réel $z^2 - 2Az + B^2 + A^2$.

 Quoi-

(*) Comme cette propoſition, qu'une équation de dégré impair a toujours une racine réelle, eſt déduite communément dans les livres d'algébre de la ſuppoſition que les racines imaginaires ſe trouvent toujours deux à deux dans les équations: pour ne pas paroitre tomber dans une cercle vicieux, je remarquerai ici qu'on peut aiſément la démontrer indépendemment de cette ſuppoſition: car ſi on ſubſtitue pour l'inconnue dans une équation impaire, premiérement $+\infty$, & puis $-\infty$, il eſt évident que toute la formule deviendra dans le premier cas $= +\infty$, & dans le ſecond $= -\infty$ d'où il ſuit qu'il y a toujours une quantité finie & réelle; qui ſubſtituée pour l'inconnue dans l'équation, la rendra $= 0$: c'eſt à dire que cette équation aura au moins une racine réelle.

Quoique cette propoſition très remarquable dans l'Analyſe, ait été maniée par les plus grands Géomètres de notre tems, elle n'a pas, que je ſache, été démontrée juſqu'à préſent d'une manière rigoureuſe, & ſatisfaiſante. Au reſte la démonſtration que je viens d'en donner a cet avantage, qu'elle n'eſt fondée que ſur la pure théorie des équations.

Il faut avouer cependant que dans les équations élevées ce procédé devenant impraticable, on ne peut par cette méthode trouver actuellement ces facteurs: il ſeroit à ſouhaiter que les différens procedés qu'à tenté, pour cela le *R.P.* Le Seur (dans un mémoire ſur le calcul intégral imprimé à Rome l'année 1748. où l'on obſerve, d'ailleurs une excellente conduite de calcul) fuſſent moins compliqués, & doüés d'un plus grand dégré de généralité; car quoique la longueur du calcul l'ait déja fait échouer dès le huitiéme dégré dans l'application qu'il a voulu en faire, ſans qu'il ait même put faire voir dans ce cas particulier la vérité de la propoſition que je viens de démontrer généralement, il paroit cependant qu'en ſimplifiant cette méthode on pourroit s'en ſervir avec ſuccès. C'eſt là une matiére que je me reſerve d'examiner une autre fois, avec la théorie & la réſolution générale des équations qui lui eſt intimément liée. Mais retournons aux quantités imaginaires conſiderées comme des derniers réſultats.

6. Si l'on réflechit ſur la nature des racines imaginaires, qui comme on ſait impliquent contradiction entre les données, on concevra évidemment qu'elles ne doivent point avoir de conſtruction Géomètrique poſſible, puiſqu'il n'eſt point de maniére de les conſidérer, qui lève la contradiction qui ſe trouve entres les données immuables par elles mêmes.

Cependant pour conſerver une certaine analogie avec les quantités négatives, un Auteur dont nous avons un cours d'algébre d'ailleurs fort eſtimable a prétendu les dé-

voir

voit prendre ſur une ligne perpendiculaire à celle où l'on les avoit ſuppoſé, ſi par exemple (pl. 1. Fig. 1.) on devoit couper la ligne $AB = 2a$ de façon que le rectangle des parties $x \times (2a - x)$, fut égal à la quantité $2a^2$ on trouveroit $x = a \pm \sqrt{(-a^2)}$, pour trouver donc cette valeur de x, qu'on prenne ſur la ligne AB, la partie $AC = $ à partie réelle de la valeur de x, & ſur la perpendiculaire ED les CE, CD auſſi $= a$, on aura les points D, E qui reſolvent le problême en ce que $AD \times DB$, ou $AE \times EB = 2a$, mais puiſque les points E, & D ſont pris hors de la ligne AB, & qu' une infinité d' autres points pris de même, auroient auſſi une propriété ſemblable, il eſt viſible, que ſi cette conſtruction ne nous induit pas en erreur, elle ne nous fait abſolument rien connoître, c'eſt cependant là un des cas ou elle pourroit paroître plus ſpécieuſe, car le plus ſouvent on ne voit abſolument pas comment le point trouvé pourroit réſoudre la queſtion, quelques changemens qu'on ſe permit dans l' énoncé du problême.

Les racines imaginaires n'admettent donc pas une conſtruction géomètrique, & on ne peut en tirer aucun avantage dans la réſolution des problêmes: on devroit par conſéquent s' attacher à les écarter autant qu'il eſt poſſible des équations finales, puiſque priſes dans quel ſens que ce ſoit, elles ne peuvent pas réſoudre la queſtion, comme les racines négatives, dont toute la contradiction conſiſte dans leur maniére d' être à l' égard des poſitives.

7. De cette conſidération il paroit qu'on peut conclure que les logaritmes des quantités négatives, qui ne ſont que l' expreſſion de leur rapport avec les poſitives, doivent être impoſſibles ou imaginaires. C'étoit le ſentiment de M. Leibnits, qui l'a ſoutenu vivement contre M. Bernoulli. Il fondoit ſon opinion ſur la nature des logaritmes, en diſant que ſi l'on ſuppoſe que 0 ſoit le logaritme de 1, & 1 celui de 2 il eſt évident que x pouvant repréſenter un

nombre quelconque entier rompu poſitif ou négatif, 2^x devra être l'expreſſion générale d'un nombre quelconque dont le logaritme ſera x: or l'on voit qu'aucune valeur poſſible de x ne peut rendre le nombre 2^x négatif, & que par conſéquent il n'y a point de logaritme d'un nombre négatif. Ce qu'on doit admettre d'autant plus volontiers, qu'autrement il s'en ſuivroit une abſurdité; c'eſt à dire qu'une quantité imaginaire auroit un logaritme réel, car ſi -1 avoit un logaritme n, $\sqrt{-1}$ devroit auſſi avoir $\frac{n}{2}$ pour logaritme.

Cependant Mr. Bernoulli diſoit que puiſque $\frac{1}{2}\ l.\ 4 = l.\sqrt{4}$, & que $\sqrt{4}$ eſt également $+2$ & -2, on en doit conclure que le nombre négatif -2 a abſolument le même logaritme que 2. Quand aux raiſons de Mr. Leibnits il y répondoit, que quoique les nombres négatifs ne formaſſent pas une ſuite avec les nombres poſitifs, cela n'empêchoit pas qu'ils n'en formaſſent une à part, dont -1 ſeroit le premier terme. Qu'au reſte $l.\sqrt{2} = \frac{1}{2}\ l.\ 2$ ſeulement parceque $\sqrt{2}$ eſt moyen proportionel entre 1 & 2; mais qu'il n'eſt pas vrai que $l.\sqrt{-2} = \frac{1}{2}\ l.-2$, puiſque $\sqrt{-2}$ n'eſt pas moyen entre -2 & -1.

Outre les raiſons que nous venons d'alléguer, Mr. Bernoulli déduiſoit immédiatement ſon ſentiment de la continuité de l'hyperbole; mais comme Mr. Euler a établi ſur des calculs neufs & très ingénieux, un troiſiéme ſentiment qui concilie toutes les difficultés que nous venons d'expoſer, je ne parlerai de cette nouvelle preuve de Mr. Bernoulli, à laquelle le célèbre Géomètre que je viens de citer n'a pas touché, qu'après avoir fait connoître ſon procédé en peu de mots.

8. On

Digitized by Google

8. On ſait que pour les logaritmes hyperboliques, ſi ω eſt infiniment petit, $l.(1+\omega)=\omega$, $l.(1+\omega)^2=2\omega$, & généralement $l.(1+\omega)^n=n\omega$, d'où l'on voit, que ſi l'on veut le logaritme fini y d'un nombre x, on aura $y=n\omega$, & $x=(1+\omega)^n$, ou bien $x^{\frac{1}{n}}=1+\omega$, ce qui donne $\omega=x^{\frac{1}{n}}-1$, le nombre n devant néceſſairement être infini dans ce cas: ſi l'on met dans l'équation $y=n\omega$, la valeur trouvée de ω, on aura $y=nx^{\frac{1}{n}}-n=l.x$: or puiſque $n=\infty$, $x^{\frac{1}{n}}$ aura une infinité de valeurs qui fourniront une infinité de logaritmes pour le nombre x.

Pour les trouver plus commodément j'obſerve que, puiſque $x=1\times x$, ſi je nomme X le logaritme tabulaire de x j'aurai $l.x=l.1+X$. Je cherche donc tous les logaritmes de l'unité en ſubſtituant 1 pour x dans la formule qui dévient $n(1^{\frac{1}{n}}-1)=y$, ou bien $(1+\frac{y}{n})^n-1=0$. Or ſi π exprime l'Arc de 180 dégré d'un cercle, dont le rayon $=1$, & λ un nombre quelconque entier, on ſait par le théorème de Mr. Cotes que cette équation réſoluë en ſes facteurs, donnera généralement $1\pm\frac{y}{n}=cof.\frac{2\lambda\pi}{n}\pm ſin.\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$; mais parceque $n=\infty$, l'Arc $\frac{2\lambda\pi}{n}$ ſera infiniment petit; ce qui change la formule en $1+\frac{y}{n}=1+\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1}$, & donne finalement $y=\pm2\lambda\pi\sqrt{-1}$.

Tous

Tous les logaritmes de $+1$ ſeront donc o, $2\pi\sqrt{-1}$, $4\pi\sqrt{-1}$, $6\pi\sqrt{-1}$ *&c.* On trouvera de même tous les logaritmes de -1, en prenant de la même maniére tous les facteurs de $(1+\frac{y}{n})^n + 1 = 0$ qui donnent généralement $1+\frac{y}{n} = cof.\, \frac{2\lambda-1}{n}\pi \pm ſin.\, \frac{2\lambda-1}{n}\pi\sqrt{-1}$; les logaritmes de -1 ſeront donc parceque $n = \infty$ $\pm\pi\sqrt{-1}$, $\pm 3\pi\sqrt{-1}$, $\pm 5\pi\sqrt{-1}$ *&c.*
Pour trouver enfin tous les logaritmes d'une quantité imaginaire quelconque $a+b\sqrt{-1}$, notre illuſtre Auteur fait $\sqrt{(a^2+b^2)} = c$, & $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$ ſeront le ſinus & le coſinus d'un angle φ facile à trouver par les tables; & la quantité imaginaire ſe changera en $c(coſ.\,\varphi + ſin.\,\varphi\sqrt{-1})$ dans un cercle, dont le rayon $= 1$: & ſi C eſt le logaritme de c, on aura $l.(a+b\sqrt{-1}) = C + l.(coſ.\,\varphi + \sqrt{-1}\, ſin.\,\varphi)$, il ſuffira donc de trouver tous les logaritmes de $coſ.\,\varphi + ſin.\,\varphi\sqrt{-1}$; pour cela j'obſerve que (*)

$coſ.\,\varphi + ſin.\,\varphi\sqrt{-1} = (1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n})^n$

tout ſe réduit donc à trouver les facteurs de

$(1+\frac{y}{n})^n - (1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n})^n = 0$ qui donnent

$1+\frac{y}{n} = (1+\frac{\varphi\sqrt{-1}}{n})(coſ.\,\frac{2\lambda\pi}{n} \pm ſin.\,\frac{2\lambda\pi}{n}\sqrt{-1})$,

d'où l'on tire par les raiſons précédentes $y = \varphi\sqrt{-1} \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$; tous les logaritmes de $a+b\sqrt{-1}$ feront donc
$C+\varphi\sqrt{-1}$, $C+(\varphi\pm 2\pi)\sqrt{-1}$, $C+(\varphi\pm 6\pi)\sqrt{-1}$ *&c.*

On

(*) Mr. Euler démontre ceci dans la diſſertation citée en faiſant voir que cette puiſſance développée donne la même ſérie infinie qu'on trouve en exprimant $coſ\,\varphi + ſin\,\varphi\sqrt{-1}$ en φ par les ſuites connues; mais on peut tirer cette concluſion avec plus de facilité en généraliſant la formule de l'art. 5. comme on peut le voir dans le premier tôme de l'Ouvrage de cet Auteur intitulé *Introductio in Analyſin infinitorum*; Cap. VIII.

Digitized by Google

On voit non ſeulement que tous les logaritmes des nombres négatifs ſont imaginaires, comme Mr. Leibnits l'avoit penſé, mais on a une méthode facile pour en trouver un auſſi grand nombre qu'on voudra, & l'on s'appercevra aiſément du parfait accord de cette théorie avec les opérations que demande l'idée des logaritmes; & je renvois pour cela à l'excellent Mémoire que j'ai cité, où Mr. Euler fait voir comment

$$2\,l.-a = 2\,l.\,a,\ 2\,l.\sqrt{-1} = l.-1,\ 3\,l.-1 + \frac{\sqrt{-1}}{n} = l.\,1\ \&c$$

ce qui réſoud toutes les difficultés, & les raiſons que Mr. Bernoulli oppoſoit à Mr. Leibnits. Il ſemble donc que tous les doutes ſont entiérement levés, & Mr. Euler ſe flatte que Mr. Bernoulli même ne ſe ſeroit pas refuſé à ſes raiſons.

9. Cependant nous trouvons dans les lettres de ce grand Géomètre une preuve qu'il regardoit comme invincible, pour établir les logaritmes des nombres négatifs, à laquelle les calculs précédens ne paroiſſent porter aucune atteinte, & dont Mr. Euler n'a pas même fait mention; il la tiroit comme nous l'avons dit plus haut de la quadrature de l'hyperbole, de la maniére ſuivante.

Soit (Pl. 1. Fig. 2.) l'hyperbole PQG avec l'oppoſée pqg entre les aſſimptotes perpendiculaires Rr, OX; ſi on conſidère le point R comme fixe, & qu'après avoir tiré les ordonnées RP, SQ, EG; rp, $ſq$, eg, on prenne les SF, EH proportionelles aux aires PS, PE, il eſt évident que la courbe $RFHO$ ſera la logaritmique, dont OX ſera l'aſſimptote.

Mais ſi l'on ſuppoſe que le point S après avoir paſſé en T arrive en e (car rien n'empéche qu'on ne puiſſe faire cette ſuppoſition) on voit que l'aire hyperbolique qui répondra à ce point ſera en partie affirmative infinie TP, & en partie négative Tg, c'eſt à dire $TP - Tg$, & ſi

Digitized by Google

$Te = TE$ l'aire qui répondra à cette abſciſſe ſera $= PE$, donc on aura une nouvelle appliquée $eh = EH$, ce qui donne une branche pour la logaritmique au deſſous de l'axe: indépandemment de la preuve qu'en vouloit tirer Mr. Bernoulli, de ce que $\frac{-dy}{-y} = \frac{dy}{y}$; raiſon que Mr. Euler a fait voir n'être pas concluante: & ces deux branches ſeront liées à l'infini, tout comme le ſont les branches de l'hyperbole (*).

La contradiction de ce réſultat avec les calculs inconteſtables de Mr. Euler, ſembloit faire douter de quelque équivoque dans le raiſonnement; cependant Mr. de la Grange de l'Académie de Berlin qui avoit auſſi été frappé de cette différence m'a bien voulu communiquer les réflexions qu'il avoit fait autrefois ſur ce ſujet; j'examinerai ici de nouveau, ſelon les vues qu'il s'étoit formé, l'origine des logaritmes hyperboliques.

10. Soit donc (Pl. 2. Fig. 3.) l'hyperbole LAP dont le centre eſt C; CX, CN les aſſimptotes, & CA le demidiamétre: ſoit l'ordonnée quelconque $PM = y$ & l'abſciſſe $CM = x$ le demidiamètre $CA = r$ on ſait que $y = \sqrt{(x^2 - r^2)}$, & que par conſéquent $y = \sqrt{-1} \times \sqrt{(r^2 - x^2)}$. Si à préſent

(*) Mr. Bernoulli après avoir conſidéré l'eſpace OTR comme poſitif prend pour négatif l'eſpace XTr, quoiqu'ils paroiſſent devoir être du même ſigne, puiſqu'ils ſont oppoſés au ſommet. Pour lever cette difficulté, on peut arriver à la même concluſion de la maniére ſuivante. Qu'on réfléchiſſe que les aires hyperboliques, ne ſont les logaritmes des abſciſſes que parceque ſi l'on prend celles-ci en progreſſion géométrique, les aires formeront une progreſſion aritmétique: ainſi l'aire $OTRP$, peut être le logaritme de TR, & $OTSQ$ le logaritme de TS &c., mais ſi l'on prend TR pour l'unité affirmative, & qu'on veuille que ſon logaritme ſoit o, il faudra toujours ſouſtraire des aires correſpondantes aux abſciſſes dont on veut le logaritme, toute l'aire $OTRP$, & le logaritme de TS, par exemple, ſera alors $-PQRS$: en effet TS étant plus petite que l'unité, ſon logaritme doit être négatif: en continuant le même raiſonnement, on trouvera que le logaritme de T, ou de o ſera $-OTPR$, &c. ſi le point S continue à reculer jusqu'en s le logaritme du nombre négatif Ts ſera toujours $TXqs - OTRP$ ce qui ſe réduit encore à $-PQRS$, c'eſt à dire au logaritme du nombre poſitif TS.

préſent on décrit du centre C avec le rayon CA, un cercle dont les abſciſſes Cm ſoient pareillement appellées x, & les ordonnées Y, on aura $Y = \surd(r^2 - x^2)$, donc ſi l'on prend les mêmes abſciſſes pour le cercle, & pour l'hyperbole, on aura toujours $y = Y\surd-1$ ce que l'on ſait d'ailleurs. Or il eſt clair que ſi deux courbes ont leurs ordonnées dans une raiſon conſtante, les aires ſeront dans la même raiſon, auſſi bien que les ſecteurs qui ſeront formés par des lignes tirées de l'origine commune des abſciſſes à chaque point des courbes: puiſque ces ſecteurs ne diffèrent de leurs aires que par des triangles de baſes égales, & qui ont leurs hauteurs dans la même raiſon des ordonnées.

Puiſque donc dans nôtre cas les ordonnées du cercle, & de l'hyperbole ſont entre elles dans la raiſon conſtante de 1 à $\surd-1$, les ſecteurs circulaires, & hyperboliques qui répondent aux mêmes abſciſſes ſeront auſſi dans la raiſon de 1 à $\surd-1$.

Cela poſé ſoit dans le cercle l'angle $PCm = \varphi$ on aura $Cm = x = r.\, cof.\, \varphi$, $mp = Y = r.\, ſin\, \varphi$, & le ſecteur $ACp = \frac{r^2\varphi}{2}$, & par conſéquent le ſecteur hyperbolique de l'abſciſſe $CM = x = r.\, cof.\, \varphi$, & de l'ordonnée $MP = y = r.\, ſin.\, \varphi\surd-1$ ſera $\frac{r^2\varphi\surd-1}{2}$

Si l'on conſidère à préſent l'hyperbole entre les aſſimptotes CN, CX, on ſait que l'aire $ABQP$ eſt égale à $\frac{r^2}{2}\, l.\, \frac{CQ}{CB}$; or ſi des deux triangles CAB, CQP, qui ſont égaux, puiſqu'ils ont les baſes en proportion réciproque des hauteurs, on léve la partie commune CHB, on aura $CHA = BHQP$, & ſi on ajoûte AHP on aura le ſecteur hyperbolique $CAP = BAPQ$, donc $\frac{r^2\varphi\surd-1}{2} = \frac{r^2}{2}\, l.\, \frac{CQ}{CB}$

 où

où $\varphi\sqrt{-1} = l.\frac{CQ}{CB}$; mais $\frac{CQ}{CB} = \frac{AB}{PQ}$, & à cauſe des triangles ſemblables ACB, PQN: $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PN}$, & par conſéquent $\varphi\sqrt{-1} = l.\frac{AC}{PN}$: or $PN = MN - MP = x - y = r.(\textit{coſ.}\ \varphi - \textit{ſin.}\ \varphi\sqrt{-1})$; donc $\frac{AC}{PN} =$

$$\frac{r}{r.(\textit{coſ.}\ \varphi - \textit{ſin.}\ \varphi\sqrt{-1})} = \frac{1}{\textit{coſ.}\ \varphi - \textit{ſin.}\ \varphi\sqrt{-1}}, \ \&\ \varphi\sqrt{-1}$$

$$= l.\frac{AC}{PN} = l.\frac{1}{\textit{coſ.}\varphi - \textit{ſin.}\varphi\sqrt{-1}} = -l.(\textit{coſ.}\varphi - \textit{ſin.}\varphi\sqrt{-1}$$

à cauſe de $l.\ 1 = 0$; & ſi l' on fait l' angle φ négatif, on aura $\varphi\sqrt{-1} = l.(\textit{coſ.}\varphi + \textit{ſin.}\ \varphi\sqrt{-1}$, qui eſt une formule aſsés connue aujourd'hui, mais qui n' a été juſques ici, que je ſache, démontrée qu' à l'aide du calcul infiniteſimal. Si *ſin.* φ eſt réel, ce qui arrivera toutes les fois que *coſ.* φ ſera plus petit que l'unité, la quantité *coſ.* $\varphi + \textit{ſin.}\ \varphi\sqrt{-1}$ pourra repréſenter une imaginaire quelconque : d' ou l' on voit comment les logaritmes imaginaires peuvent être ramenés à des Arcs de cercle ; que ſi *coſ.* $\varphi > 1$ alors $\sqrt{(1 - \textit{coſ.}\ \varphi^2)} = \textit{ſin.}\ \varphi$, ſera une quantité imaginaire qui multipliée par $\sqrt{-1}$ devient réelle ; donc dans ce cas $\textit{coſ.}\ \varphi + \textit{ſin.}\ \varphi\sqrt{-1}$ ſera une quantité réelle dont le logaritme pourra être exprimé par un Arc de cercle imaginaire ; on pourra de même ramener les Arcs de cercle réels à des logaritmes de quantités imaginaires, & des Arcs de cercle imaginaires à des logaritmes de quantités réelles, ce qu' il ſuffira d'avoir indiqué ici, puiſque cette théorie eſt déja aſsès connue, & qu' il en eſt amplement traité dans la Diſſertation de Mr. Euler que j'ai déja citée.

Reprenons nôtre équation $\varphi\sqrt{-1} = l.(\textit{coſ.} + \textit{ſin.}\varphi\sqrt{-1})$, ſi l'on y ſuppoſe $\varphi = 2\lambda\pi$, π dénotant la demicirconférence du cercle dont le rayon $= 1$, & λ un nombre quelcon-

conque entier poſitif ou négatif: puiſque $\mathit{ſin.}\ 2\lambda\pi = 0$, & $\mathit{coſ.}\ 2\lambda\pi = 1$, on aura après avoir fait la ſubſtitution $2\lambda\pi\sqrt{-1} = l. + 1$, qui eſt la formule que Mr. Euler a trouvé par un procèdé tout à fait différent, & qui donne $l. + 1 = 0, \pm 2\pi\sqrt{-1}, \pm 4\pi\sqrt{-1}$ &c. De même ſi l'on fait $\varphi = \pi, = 3\pi, = 5\pi$, & généralement $\varphi = (2\lambda - 1)\pi$, ce qui donne $\mathit{ſin.}\ \varphi = 0$, $\mathit{coſ.}\ \varphi = -1$, on aura $(2\lambda - 1)\pi\sqrt{-1} = l. - 1$; on trouveroit avec la même facilité tous les logaritmes de la quantité imaginaire $a + b\sqrt{-1}$, car ſi on décrit un cercle dont le rayon ſoit $\sqrt{(a^2 + b^2)}$ il eſt conſtant, qu'il y aura toujours un angle φ qui donnera $\mathit{coſ.}\ \varphi + \mathit{ſin.}\ \varphi\sqrt{-1} = a + b\sqrt{-1}$. Or ſi dans la formule $\varphi\sqrt{-1} = l.\ (\mathit{coſ.}\ \varphi + \mathit{ſin.}\ \varphi\sqrt{-1})$ on ajoûte à φ, $2\lambda\pi$, la quantité $\mathit{coſ.}\ \varphi + \mathit{ſin.}\ \varphi\sqrt{-1}$. ne changera point de valeur, comme il eſt évident, & conſéquemment cette ſuppoſition n'altérera point la valeur de $a + b\sqrt{-1}$; & l'on aura généralement $(\varphi + 2\lambda\pi)\sqrt{-1} = l.\ (a + b\sqrt{-1})$.

Voila donc la Téorie de Mr. Euler apuiée ſur la quadrature de l'hyperbole, dont Mr. Bernoulli ſe ſervoit pour prouver un ſentiment abſolument oppoſé, ſans que ſa démonſtration ait pour cela rien perdu de ſa force; il eſt donc néceſſaire de comparer enſemble ces deux concluſions, & les procédés qui nous y ont conduit: ce qui ſera à préſent plus facile, puiſqu'ils ſont réduits à dépendre d'un ſeul, & même principe.

11. Si l'on fait attention au raiſonnement de Mr. Bernoulli on s'apercevra aiſément qu'il eſt tout fondé ſur la continuité de la branche AL (pl. 2. fig. 4.) de l'hyperbole avec la $a\,l$, ces deux branches étant liées à l'infini comme il eſt évident; car ſi l'on fait $CQ = z$, $CA = r$, $QP = u$, on a $CB = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $uz = \frac{r^2}{2}$ ce qui donne $u = \frac{r^2}{2z}$, d'où l'on voit que ſi on fait $z = \infty$, on trouve $u = 0$, & que ſi z décroit juſqu'a être

$= o$ on aura $u = \infty = CX$, & z dévenant à l'inſtant infiniment petit négatif ou $-o$, on trouvera $u = -\infty = CG$.

Concevons à préſent un rayon CP, qui ſuive le point P pendant que celuici par un mouvement continu décrit l'hyperbole, & que les aires correſpondantes donnent naiſſance à la logaritmique; il eſt viſible que ce rayon partant de la poſition CQ, l'angle ACP qu'il forme avec l'axe décroitra continuellement, juſqu'à ce que CP dévenant CA l'angle ſe trouve nul, d'où il commencera à prendre des acroiſſements négatifs, mais quand le rayon CP ſera arrivé à la poſition CX, le point P qui eſt alors L paſſant immédiatement en l, comme on l'a vû, le rayon pour le ſuivre devra dévenir tout d'un coup négatif CG, & l'angle ACP ſera en même tems acru de deux angles droits: & il eſt à remarquer que c'eſt alors préciſement que commence la génération de la ſeconde branche de la logaritmique.

Cela poſé reprenons nôtre équation $\varphi\sqrt{-1} = l.\,(\mathit{coſ}.\,\varphi \pm \mathit{ſin}.\,\varphi\sqrt{-1})$, on a vu que ſi $\varphi = o$ on avoit $o = l. + 1$ de même ſi $\varphi = \frac{\pi}{4}$ on a $\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = l.\,(\mathit{coſ}.\frac{\pi}{4} \pm \mathit{ſin}.\frac{\pi}{4}\sqrt{-1})$; mais il eſt évident, que pour ſuivre le mouvement du point P, & conſerver la continuité de l'hyperbole, il ſe doit faire un ſaut dans la continuité des angles, & le rayon qui étoit CQ dévenant alors tout d'un coup CR, l'angle de ACQ paſſera à être aCR, ce qui change la formule en $\frac{\pi}{4}\sqrt{-1} = l.\,(-\mathit{coſ}.\frac{\pi}{4} \mp \mathit{ſin}.\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}$; cependant l'angle qui à préſent eſt $\pi : 4$ décroitra toujours à cauſe du mouvement du point P, & donnera généralement $\varphi\sqrt{-1} = l.\,(-\mathit{coſ}.\,\varphi \mp \mathit{ſin}.\,\varphi\sqrt{-1})$ juſqu'à ce que le rayon vecteur dévenant Ca on aye à cauſe de $\varphi = o, o = l. - 1$.

Il eſt cependant évident que ce ſaut de deux angles droits bleſſe la continuité des arcs de cercle: d'où on peut infe-

inférer que cette formule ne contient pas le paſſage algébrique des logaritmes des quantités poſitives à ceux des négatives ; mais il paroit d'autre part qu'une expreſſion différentielle de l'arc φ par ſes ſinus & coſinus devroit donner indiſtinctément la rélation de cet arc φ à *coſ.* φ & *ſin.* φ, & de φ à *coſ.* $(\varphi + \pi)$ & *ſin.* $(\varphi + \pi)$.

12. Delà il ſemble qu'on pourroit croire qu'une expreſſion différentielle qui conduit à des logaritmes, appartiendroit également à des logaritmes de quantités poſitives, & à des logaritmes de quantités negatives, j'obſerve en effet que ces ſortes d'expreſſions différentielles (pour ne pas parler ici des autres qui ſont étrangéres à mon ſujet) ſont beaucoup plus étendues, que leurs expreſſions algébriques, ou, pour mieux dire, qu'une même expreſſion différentielle conduit également à différentes équations algébriques : ſi l'on cherche par exemple la ſoutengente de l'ellipſe exprimée par $y = \frac{b^2}{a^2}(a - x^2)$ on la trouve $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2 - x^2}{x}$, où la fraction $\frac{b}{a}$ ne ſe trouve plus, & qui par conſéquent appartient à toutes les elipſes faites ſur le même diamétre a: il eſt auſſi viſible que quoíque la courbe ne ſe trouve plus quand $x > a$ la ſoutengente cependant continue à être réelle, & appartient alors aux hyperboles qu'on peut décrire ſur l'axe donné ; toutes ces courbes ſont donc liées d'une maniére tranſcendante par le moyen de la formule $\frac{ydx}{dy} = \frac{a^2 - x^2}{x}$, & quoiqu'on ne puiſſe pas paſſer de l'une à l'autre ſans violer la continuité algébrique, on peut faire ce paſſage ſans violer en aucune façon la continuité tranſcendante. Or l'intégration de cette équation conduit à des logaritmes, car elle donne $\frac{dy}{y} = \frac{x\,dx}{a^2 - x^2}$ & intégrant $ly = \frac{1}{2} l.(x^2 - a^2) + \frac{1}{2} lm$ qui fait $y = \sqrt{m} \times (a^2 - x^2)$ où la lettre m doit pouvoir recevoir une valeur quelconque

que poſitive négative ou même imaginaire, pour conſerver la même généralité à cette formule qu'on rencontre dans la différentielle $\frac{dy}{y} = \frac{x\,d\,x}{a^2 - x^2}$ puiſqu'elle appartient également à $y = M(x^2 - a^2)$, & à $y = N(a - x^2)$.

14. Pour confirmer cette théorie je crois qu'il ne ſera pas hors de propos de chercher directement l'intégrale de la formule $d\,x = \frac{a\,dy}{y}$ par la méthode ordinaire du calcul intégral, qui a toujours été accuſé d'être inſuffiſant, & même fautif dans cette occaſion; je donnerai d'autant plus volontiers ici ce calcul qu'il eſt entiérement neuf, & qu'il peut être d'uſage dans beaucoup d'autres occaſions.

L'intégration de l'équation propoſée fournit $x = \frac{ay^0}{0} + A$, pour déterminer A ſuppoſons que y doive être $= m$ lorſque $x = 0$, on aura $\frac{am^0}{0} + A = 0$, ou $A = -\frac{am^0}{0}$, & par conſéquent $x = \frac{a(y^0 - m^0)}{0}$, qu'on diviſe par a, & qu'on multiplie par 0, & on aura $\frac{0\,x}{a} = y^0 - m^0$ & $y^0 = m^0 + \frac{0x}{a}$, & extrayant de part & d'autre la racine 0, $y = (m^0 + \frac{0x}{a})^{\frac{1}{0}}$, & tirant de même la racine x $y^{\frac{1}{x}} = (m^0 + \frac{0\,x}{a})^{\frac{1}{0x}}$. Si à préſent on développe cette puiſſance, on trouvera $y^{1 \cdot x} = m^{0:0x} + \frac{1:0x}{1} \cdot m^{0\cdot(1:0x-1)} \cdot \frac{0\,x}{a} + \frac{(1:0x)\times(1:0x-1)}{1\cdot 2} \cdot m^{0\cdot(1:0x-2)} \cdot$

$0^2 x^2$

$\frac{o^2 x^2}{a^2} + \frac{(1:o\,x)\times(1:o\,x-1)\times(1:o\,x-2)}{1.2.3} . m^{o.(1:o\,x-3)} .$
$\frac{o^3 x^3}{a^3}$ + &c., & réduiſant au même dénominateur les fractions dans les expoſans, & les coéficiens

$$y^{1:x} = m^{o:ox} + \frac{1}{ox} m^{o(1-ox):ox} . \frac{o\,x}{a} +$$
$$\frac{1\times(1-o\,x)}{2\,o^2 x^2} m^{o.(1-o2x):ox} . \frac{o^2 x^2}{a^2} + \frac{1\times(1-ox)\times(1-o\,2\,x)}{2.3.o^3 x^3}$$
$$m^{o.(1-o3x):ox} . \frac{o^3 x^3}{a^3} + \&c.,$$ & réduiſant & laiſſant les termes qui ſont nuls $y^{1:x} = m^{1:x} + \frac{m^{1:x}}{a} + \frac{m^{1:x}}{2\,a^2} + \frac{m^{1:x}}{2.3\,a^3}$ + &c., on aûra donc

$$y^{\frac{1}{x}} = m^{\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2.3.a^3} + \frac{1}{1.2.3.4a^4} + \&c.\right)$$

ſi on fait cette ſuite

$$1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{2.3a^3} + \frac{1}{1.2.3.4a^4} + \&c. = e,$$ on aura

$y^{\frac{1}{x}} = m^{\frac{1}{x}} e$, ce qui donne $y = m\,e^x$ qui eſt l'équation finale cherchée qui dévient $l.y = x\,l.\,e + l.\,m$.

L' arbitraire m depend donc abſolument des applications particuliéres qu'on veut faire de cette formule, ainſi dans l'équation $\frac{y\,d\,x}{d\,y} = \frac{x^2-a^2}{x}$ qui intégrée par le moyen des logaritmes nous à donné généralement $y^2 = m\,(a^2 - x^2)$: il faut faire l' indéterminée $m = \frac{a^2}{b^2}$ ſi l'on veut qu'elle apartienne à l' ellipſe exprimée par l' équation $y = \frac{a}{b} \surd (a^2 - x^2)$,

&

Digitized by Google

& $m = -\frac{a^2}{b^2}$ ſi l'on veut l'appliquer à l'hyperbole de l'équation $y = \frac{a}{b} \sqrt{(x^2 - a^2)}$.

On conclut de tout ceci que la courbe exprimée par l'équation $dx = \frac{dy}{y}$ ou $x = l.\ my$ doit néceſſairement être compoſée d'une infinité de branches au deſſus, & au deſſous de l'axe; ainſi (fig. 6.), un logaritme AE n'appartient généralement pas plus au nombre EF qu'aux nombres EG, EH &c., & même à un imaginaire quelconque. J'obſerve cependant qu'une ſeule branche BF peut ſatiſfaire à tous les cas des nombres poſitifs, & la bf à tous les négatifs en changeant ſeulement l'origine A, ce qui étoit deja évident par la Théorie des logaritmes. Mais l'origine étant une fois fixée en A, ſi l'on veut par exemple que $l.\ 1 = 0$, AB étant $= 1$, c'eſt dans la ſeule branche BF qu'on doit chercher les logaritmes des autres nombres poſitifs; car ſi on vouloit encor ſe ſervir de la NG, il eſt évident qu'en prenant $MN = 1$ on auroit $- AM = l.\ MN = l. + 1$ ce qui eſt contre la ſuppoſition qu'on avoit fait de $l.\ 1 = 0$.

Toutes les branches BF CG &c. ne ſont donc pas liées algébriquement, & ne ſont qu'autant de cas particuliers de l'équation différentielle $x = \frac{dy}{y}$, qui ſont déterminés par l'intégration. L'expreſſion $y = e^x$ exclut auſſi la branche bf, puiſque quelque valeur qu'on donne à x, y ne peut être négatif à moins qu'on ne fît x imaginaire.

Au reſte pour faire mieux ſentir qu'on ne rencontre x imaginaire, que parcequ'on cherche y négative dans une branche ou elle ne peut pas l'être, il eſt bon de remarquer, que cela arrive même dans les courbes algébriques.

Soit

Soit par exemple la courbe repréſentée par l'équation $y = \frac{x^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$, qui a évidemment deux branches une au deſſus, & l'autre au deſſous de l'axe, à cauſe de l'ambiguité du ſigne radical, ſi dans la branche qui appartient à $+\sqrt{(a^2 - x^2)}$ je voulois trouver un y négatif, on voit qu'il faudroit que je fiſſe x imaginaire, ce qui me donneroit $y = \frac{-x^2}{\sqrt{(a^2 + x^2)}}$.

Il eſt donc viſible, que l'expreſſion tranſcendante nous laiſſe à la vérité le choix d'une branche quelconque de la logaritmique, mais que la nature du problème nous ayant déterminé à une d'elles, il n'eſt plus permis de paſſer à une autre, puiſqu'elles ne ſont pas liées algébriquement.

15. Tout ce que nous venons de dire ne paroit cependant encor porter aucune atteinte à la démonſtration de Mr. Bernoulli; mais par un examen réfléchi on pourra en découvrir le défaut, & quels ſont les cas où on pourroit l'adopter. Reprénons pour cela l'équation à l'hyperbole entre ſes aſſimptotes $z = \frac{1}{u}$ qui donne $dz = -\frac{z\,du}{u}$, d'où l'on tire pour l'élement de l'aire $\frac{dz}{z}$, qui eſt auſſi comme on ſait la différence de $l.\,z$: qu'on ſuppoſe à préſent avec Mr. Bernoulli, que l'abſciſſe z décroiſſe, juſqu'à être finalement nulle, il eſt hors de doute, que l'ordonnée u, après être dévenue infinie paſſera à être infinie négative, & appartiendra à l'autre branche de l'hyperbole puiſqu'il y a un paſſage algébrique de l'infini poſitif à l'infini négatif, mais il n'en ſera pas de même de l'aire, puiſque lorſque l'abſciſſe z dévient infiniment petite, & l'ordonnée infiniment grande, l'élement de la Courbe ſe trouvant alors

$\frac{m\,dz}{dz}$, qui eſt une quantité finie, & cette aire lorſque z dévient infiniment petite négative ſe trouvant de même finie, mais négative, l' aire de l' hyperbole ne peut faire ce paſſage ſans reçevoir tout à coup un décroiſſement fini; or une quantité quelconque ne peut dévenir négative de poſitive qu'elle étoit, ſans paſſer par o ou par l'infini; il eſt donc évident qu' il n'y à pas un paſſage algébrique de la branche poſitive de la logaritmique à la branche négative, puiſque la continuité des aires hyperboliques eſt interrompuë par la quantité finie $\frac{m\,dz}{dz} = m$.

Les deux branches de la logaritmique trouvées par Mr. Bernoulli ſont donc iſolées, & indépendantes l' une de l'autre algébriquement, quoiqu' elles ſoient liées par leur expreſſion tranſcendante; mais elles ne ſont pas moins réelles l' une que l'autre, & elles auront leurs uſages particuliers dans pluſieurs cas.

Cette théorie pouvant peut être paroître une pure ſpéculation abſolument inutile dans la pratique; je crois qu'il ne ſera pas hors de propos d' en faire ici l' application pour ſervir de dénouëment à quelques paradoxes tirés de la Mécanique (*).

16. Soit par exemple (Fig.8.) un centre d'attraction C dont la force ſoit proportionelle, à la n^{me} puiſſance des diſtances, on aura pour l' expreſſion de la viteſſe u d' un corps A lors qu' il aura parcouru l' eſpace $AB = x$; l' équation $\frac{dx}{[a-x]^n} = u\,du$, & en intégrant $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1} - (a-x)^{n+1}}{n+1}$ parceque $u = o$ quand $x = o$; l'on voit

(*) Pour connoître l'importance des remarques ſuivantes, je prie le Lecteur de relire la Propoſition 32. du premier Tôme de la Mécanique de Mr. Euler, & les autres Propoſitions de cet excellent Ouvrage qui peuvent y avoir rapport.

Digitized by Google

voit facilement, que quand le corps ſera arrivé en C on aura $\frac{u^2}{2} = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ ſi $n+1$ eſt poſitif, & $u^2 = \infty$ ſi $n+1$ eſt négatif, mais ſi $n+1=0$ on aura alors recours à la méthode, que nous avons enſeigné (art. 14.) & on trouvera pour l'expreſſion générale de la viteſſe, $\frac{u^2}{2} = l.\frac{a}{a-x}$ ſans retourner pour cela à l'équation différentielle, comme tous les Auteurs qui ont écrit de cette matiére ont été obligés de faire juſques à préſent, & il en ſera de même, pour le dire en paſſant, d'une infinité de cas ſemblables qui ſe rencontrent très fréquemment dans la mécanique, de façon qu'on étoit toujours contraint de recommencer un calcul ſouvent aſſés long: on aura dans ce cas pour la viteſſe au point C, $u^2 = l.\ \infty$

(*) Il eſt de plus évident par la nature du problème, que le corps devra dans tous les cas paſſer au delà du point C de façon, que ſi $Ca = CA$, & $Cb = CB$ ſa viteſſe en b ſera la même, qu'au point B, & ſera finalement nulle au point a comme elle l'étoit en A: or on voit qu'afin que la même formule, qui nous donnoit la viteſſe du corps A pour la partie AC puiſſe s'appliquer également à la partie aC il eſt néceſſaire qu'en faiſant $a-x$ négatif on trouve l'acroiſſement de la viteſſe négatif, & cette même viteſſe toujours poſitive, & il eſt facile de s'apercevoir, que cela doit toujours arriver quand n ſera un nombre impair, & entier, poſitif ou négatif. Mais par quelle fatalité devroit-on en excepter le cas où $n = -1$ comme on l'à pré-

ſ a tendu

(*) Mr. Euler a prétendu à la vérité démontrer l'impoſſibilité de ce paſſage par la conſidération d'une elipſe (art. 665.) de ſa mécanique, mais le P. Boſcovik a réſolu cette difficulté (*art. 82. Diſſertationis de atractione corporum ad centrum immobile tom. 2. part. 3. Academiæ Bononienſis.*)

Digitized by Google

tendu juſques à préſent, parcequ' on ſuppoſoit dans ce cas, que l' expreſſion de la viteſſe au delà du point C étoit imaginaire, étant exprimée par le logaritme d' une quantité négative.

Pour examiner ceci, qu' on ſe rappelle, ce que nous avons vu (art. 15.) que le paſſage des logaritmes des quantités poſitives à ceux des négatives n' étoit interrompu, que parceque l' aire qui leur donnoit naiſſance recevoit tout d' un coup un acroiſſement fini. Toutes les fois donc qu' on pourra faire cette ſuppoſition ſans hurter la nature du problème, il eſt évident, que ce paſſage ne ſera point interrompu, & que les logaritmes des quantités poſitives, & négatives quoique tirés de la même formule ſeront également réels. Or s' il exiſtoit dans la nature une loi telle que nous venons de la ſuppoſer, je ne vois pas pourquoi on ne voudroit pas admetre cette eſpèce de ſaut dans l' acroiſſement de la viteſſe du corps au point C puiſqu' il eſt ſur que la viteſſe, qui un inſtant avant le paſſage étoit finie redévient finie un inſtant après. Le cas de $n = -1$ rentreroit alors dans la régle générale, & $l.\,(a-x)$ demeureroit réel quoique $x > a$ ce qui en effet eſt conforme aux loix de la nature quoiqu' il en ſoit on peut faire cette ſuppoſition ſans crainte d' erreur.

Pour ce qui eſt des cas, ou n eſt un nombre pair, on a vu plus haut que quoique le Corps paſſe également le point C, de façon, que ſa viteſſe eſt de nouveau zero au point a, cependant en faiſant $x > a$ la formule ne donne plus la vraye viteſſe du corps A, & cela dépend uniquement du défaut de l' expreſſion algébrique, qu' on ne peut alors aſſigner générale pour les deux cas.

Pour lui donner cependant la plus grande généralité, dont elle eſt ſuſceptible qu' on poſe $b\,(a-x)^n\,dx = u\,du$ où la lettre b ſoit une indéterminée dont la valeur depende des applications particuliéres qu' on veut faire de cette formule

mule ; on a en intégrant $b\left(\frac{a^{n+1}-[a-x]^{n+1}}{n+1.}\right)=\frac{u^2}{2}$ l'on voit que l'indéterminée b doit être poſitive toutes les fois que m eſt un nombre impair, & quand m eſt un nombre pair on fera de même b poſitive de A juſqu'en C, & négative de C juſqu'en a; or puiſque dans le point C conſidéré comme e dernier point de la ligne poſitive AC on a $\frac{u^2}{2}=\frac{a^{n+1}}{n+1}$ en le conſidérant comme le premier point négatif, on doit trouver pareillement $\frac{a^{n+1}}{n+1}$ ce qui donne quand $x=2a$, $u^2=0$, comme il doit être en effet.

Mais lorſque n eſt un nombre rompu dont le dénominateur eſt pair, paſſé le point C, il faut faire $b=-m\sqrt{-1}$ & alors la même formule pourra ſervir pour tous les cas.

Voila quels changemens on eſt obligé de faire à la formule pour que dans certaines circonſtances elle ne nous rende pas imaginaires des expreſſions qui doivent y être réelles.

17. Il ſe préſente une autre difficulté dans les cas où m eſt impair, & négatif, il eſt évident que le tems doit toujours croitre à méſure que le corps s'éloigne du point A cependant ſuppoſons que $m=-3$ on aura $\frac{dx}{(a-x)^3}=u\,du$ & intégrant $u^2=\frac{1}{(a-x)^2}-\frac{1}{a^2}=\frac{2ax-x^2}{a^2(a-x)^2}$, & $u=\frac{\sqrt{(2ax-x^2)}}{a(a-x)}$, & par conſéquent $dt=\frac{dx}{u}=\frac{a\,dx(a-x)}{\sqrt{(2ax-x^2)}}$, & $t=a\sqrt{(2ax-x^2)}$ on voit que cette expreſſion du tems eſt dans ce cas exprimée par des lignes proportionelles aux ordonnées d'un cercle décrit, ſur le diamêtre Aa (Fig. 9.), mais elle ne peut ſervir que juſques en C, puiſque depuis ce point les ordonnées décroiſſent, ce qu'il

eſt

Digitized by Google

eſt abſurde d'attribuer au tems. Mais ſi l'on fait reflexion que le radical $a\surd(2ax-x^2)$ a deux valeurs, on verra bientôt que le ſigne $+$ de ce radical doit ſervir de A en C, & le ſigne $-$ de C en a: on aura donc généralement dans ce dernier cas $t=-a\surd(2ax-x^2+A)$; pour déterminer la conſtante A qu'on réflechiſſe que dans le point C les deux valeurs de t doivent être les mêmes, d'où l'on tirera $a^2=-a^2+A$ & $A=2a^2$, & le tems t ſera généralement exprimé par $2a^2-a\surd(ax-x^2)$; ce n'eſt donc que le quart de cercle AB qui ſervira à la conſtruction du tems, juſqu'au point C, & au de là de C on devra conſtruire un cercle du diamètre $=a$ qui touche l'autre en B, & continuer à prendre les tems ſur ce nouveau quart de cercle. Quoique ces deux cercles ne puiſſent pas être contenus dans une même equation algébrique, il eſt eſt cependant viſible que le quart de cercle AB eſt également contigu avec BD qu'il le ſeroit avec le reſte du demi cercle.

Cette conſtruction eſt facile, & exacte, & elle me paroit lever les difficultés qui dans ce cas, & dans un grand nombre d'autres ſemblables ont arrèté les géométres.

Voila je crois aſſés d'exemples de formules algébriques, qui pour être appliquées à des cas qu'elles ne peuvent exprimer, rendent imaginaires & abſurdes des expreſſions, qui doivent être réelles par la nature du problême. (*)

C'eſt

(*) Dans l'article *Gravitation* de l'Enciclopédie, & dans le troiſiéme tôme des Recherches ſur le ſiſtême du Monde (pag. 198.): il eſt parlé d'un certain paradoxe qu'on rencontre dans les formules de l'attraction d'un point vers une ſurface ſphérique quelconque. Comme l'explication que j'en ait trouvé, & que j'ai même communiqué à l'Auteur dans une lettre particuliére, me paroit fondée, & que d'ailleurs elle tient immédiatement aux principes établis ci-deſſus, je crois qu'on voudra me permettre d'ajouter ici deux mots ſur ce point. Voici en quoi conſiſte le paradoxe. Soit cherchée l'attraction d'une ſurface ſpérique ſur un point placé ſur la ſurface même dans le cas des forces en raiſon inverſe des quarrés des diſtances. Si l'on commence par conſidérer le point au delà de la ſurface, & qu'ayant trouvé l'expreſſion générale de ſon attraction, on

C'eſt ſans doute un inconvénient dans l'algébre qu'on ne puiſſent pas toujours trouver des formules générales, qui puiſſe s'appliquer à toutes les circonſtances de la queſtion, mais il ſera toujours aſſès facile de reconnoître les cas qui ne peuvent être exprimés par ces équations, & on pourra les corriger par un procédé ſemblable à celui, dont je me ſuis ſervi.

18. Ces cas ſont au reſte plus fréquents dans l'algébre qu'on ne ſe l'imagine communément, & quoique le cas irréductible du troiſiéme dégré ne rende pas l'inconnue abſolument imaginaire, la mauvaiſe méthode qui y conduit ne laiſſe pas de lui en donner la forme, comme tout le monde le ſait.

On

faſſe enſuite évanouir la diſtance de ce point à la ſurface on aura 4π pour l'attraction. Au contraire ſi le point eſt d'abord ſuppoſé au dedans de la ſurface, ſon attraction ſe trouve toujours égale a zero, d'où elle reſte encore nulle quand le point vient toucher la ſurface même. Que ſi l'on veut d'abord regarder le point comme placé ſur la ſurface, on obtient pour lors la formule de ſon attraction $= 2\pi$. On a donc trois valeurs différentes 4π, 2π, o, qui ſemblent appartenir au même cas; ce qui doit paroitre au prémier aſpect abſurde, & contradictoire. Pour trouver le dénouement de cette difficulté, il faut rechercher avec ſoin ce que ces trois manières de conſidérer le méme cas peuvent avoir de différent entr'elles. Or je dis que cette différence dépend du point de la ſurface A qui exerce une force finie, & $= 2\pi$ le point B, lorſque on fait évanouir leur diſtance AB. Pour s'en convaincre on n'a qu'à réflechir qu'un point de ſurface eſt néceſſairement un infiniment petit des ſecond ordre; & que la fonction AB^{2} de la diſtance évanouiſſante dévient auſſi infiniment petite du même ordre, d'où il s'enſuit que l'attraction du point A qui eſt proportionelle à ce point, diviſée par la fonction donnée deviendra finie; & on peut s'aſſûrer d'ailleurs que cette attraction ſera préciſement $= 2\pi$. Ceci poſé quand on fait venir le point B à la ſurface de dehors, on a l'attraction $= 4\pi$ qui eſt compoſée de l'attraction 2π du point A, & de l'autre partie 2π qui doit néceſſairement exprimer l'attraction du reſte de la ſurface. Mais ſi l'on fait que le point vienne toucher la ſurface au dedans alors l'attraction 2π du point A devra agir en ſens contraire, & jointe avec l'autre partie 2π qui agit dans le même ſens, qu'auparavant donnera $2\pi - 2\pi = o$ pour l'attraction dans ce cas; enfin, ſi le point eſt d'abord placé ſur la ſurface en A, on exclut dans ce cas l'attraction du point de ſurface A, & on a ſeulement 2π pour l'attraction totale, tout de même comme nous le donne le calcul. Pour ſentir mieux la raiſon de ces différences, il faut faire le calcul en entier; on verra aiſément que la différentielle eſt compoſée de deux parties, dont l'une eſt toute multipliée par la diſtance du point à la ſurface, & devient par conſéquent égale

On rencontre un ſemblable inconvénient, lorſqu' on tente de conſtruire une équation au moyen d' une courbe qui n'en eſt pas capable, car quoique ſes racines ſoyent réelles, on trouve pour les déterminer des interſections imaginaires, cela arrive ſouvent quand on ſe ſert de deux courbes qui peuvent avoir des abſciſſes auxquelles répondent des appliquées imaginaires, car il eſt évident que ces courbes peuvent avoir, à une abſciſſe commune, des ordonnées égales quoique imaginaires: ce qui ne peut pas ſervir à déterminer cette abſciſſe. Si cependant on ſubſtituoit à la place de ces courbes, des autres que j' appellerai leurs contraires, qui euſſent les ordonnées réelles préciſément où les premiéres les ont imaginaires, les interſections de ces deux courbes réſoudroient ſûrement le problême; mais cet ouvrage étant actuellement ſous preſſe, je ne m' arrêterai pas à examiner cette matiére, qui me paroit cependant digne de quelque attention.

Avant

à zero, lorſque cette diſtance évanouit, l' autre partie donnant 2ϖ pour *intégrale*; c' eſt le cas, où le point eſt d' abord placé ſur la ſurface; *mais ſi l' on* achéve l' intégration avant que de faire évanouir cette diſtance on trouve l' intégrale de la prémiere partie une expreſſion finie, qui ſe réduit au contact $= 2\varpi$ ſi le corps a été ſuppoſé de dehors, & a -2ϖ ſi on l' a ſuppoſé de dedans, d' où l' on tire pour le prémier cas $2\varpi + 2\varpi = 4\varpi$, & $2\varpi - 2\varpi = 0$ pour l'autre. Voila donc pourquoi la même formule ne peut pas ſervir pour tous les cas poſſibles, car dans le paſſage du point de dehors en dedans, il faudroit que l' attraction 2ϖ devint tout d' un coup $= 0$; & puis $= -2\varpi$ ce qui choque directement la loi de continuité généralement admiſe dans les formules algébriques. M. Daniel Bernoulli avoit déja ſenti l' incompatibilité de ces cas dans une même formule, comme il paroit dans l' art. 4. du chap. 11. de la Pièce ſur le flux, & réflux de la mer. Au reſte il ne doit pas paroitre étonnant qu' un point qui par rapport à une ſurface doit être régardé comme zero puiſſe dans certains cas éxercer une force finie; car il eſt clair qu' il ſuffit pour cela que la fonction qui exprime la force dévienne infinie, & infinie du même ordre que le point eſt infiniment petit: Nous avons vu comment une formule qui eſt toujours égale a zero peut réçevoir une valeur finie dans certains cas particuliers (chap. VI de ma diſſertation ſur le ſon) c' eſt la même choſe qui arrive ici. Au reſte les Géomètres ne ſont plus étrangers a ces ſortes de paradoxes, ſi on les peut nommer ainſi, (Car je n' y vois que des conſéquences toutes naturelles des ſuppoſitions qu' on a fait dans le calcul.) Mr. Clairaut à fait voir un ſemblable cas dans ſa Théorie ſur la figure de la Terre, art. 45. de la prémiere partie, & le

19 Avant cependant que de finir ces réflexions je crois qu'il ne ſera pas hors de propos de donner au moyen de la formule de l' art. 10. une démonſtration nouvelle & purement géométrique du fameux Théorême des imaginaires, publié premiérement par Mr. D' Alembert dans ſon Traité de la cauſe des vents, & puis manié de nouveau par Mr. Euler dans la Diſſertation ſur les imaginaires déja citée, d' autant plus que ces deux célèbres Géomêtres ne l' ont démontré que par les Principes du calcul différentiel. Voici l' énoncé de cette propoſition, dont véritablement l' uſage me paroit fort rare dans l' Analyſe. Une quantité imaginaire quelconque, de la forme $c + d\sqrt{-1}$ élevée à une puiſſance dont l' expoſant ſoit auſſi imaginaire de la même forme, peut toujours ſe réduire à une imaginaire ſimple $A + B\sqrt{-1}$, A & B étant des quantités réelles: qu'on poſe donc $(a + b\sqrt{-1}.)^{m+n\sqrt{-1}} = A + B\sqrt{-1}$ il s' agit de trouver les valeurs de A & de B.

Soit pour cela $\sqrt{(a^2 + b^2)} = r$, & $\frac{a}{r} = coſ.\,\varphi$, $\frac{b}{r} = ſin.\,\varphi$, de plus $\sqrt{(A^2 + B^2)} = R$, & $\frac{A}{R} = coſ.\,\theta$, $\frac{B}{R} =$

Pere Boſchovik dans un mémoire ſur l' attraction des corps vers un centre fixe imprimé dans la troiſiéme partie du ſecond tôme des Commentaires de l' Académie de Bologne; & on voit dans la diſſertation préſente que le dénouement des difficultés ſur le paſſage des logaritmes des nombres poſitifs à ceux des nombres negatifs dépend d' un pareil Principe.

Mr. D' Alembert apporte encore pour objection à la loi de continuité l'exemple de la courbe $y = \sqrt{ax} + \sqrt[4]{a^3(x+b)}$, que Mr. Euler avoit déja propoſé dans ſon Mémoire ſur les logaritmes. Cette équation dégagée des radicaux monte au huitiéme dégré; & a généralement un diamètre, cependant dans le cas, où $b = 0$ elle ne monte plus qu' au quatriéme, & perd tout d'un coup ſon diamètre; mais il faut remarquer que cela n' arrive que parceque la courbe dans ce cas devient un ſiſtême de deux, qui ſont exprimées par

$y^4 - 2axy^2 + 4ax^2y + a^2x^2 - a^3x = 0$ &

$y^4 - 2axy^2 - 4ax^2y + a^2x^2 - a^3x = 0$

dont chacune en particulier eſt à la vérité deſtituée de diamètre; mais leur ſiſtême le conſerve toujours. Tous les ordres des courbes algebriques contiennent des exemples de cas ſemblables. NOTE DE Mr. LOUIS DE LA GRANGE.

Digitized by Google

ſin. θ, on aura $[r\,(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſin.}\,\varphi\sqrt{-1})]^{m+n\sqrt{-1}} = R\,(\text{coſ.}\,\theta + \text{ſin.}\,\theta\sqrt{-1})$, & en prenant les logaritmes $(m+n\sqrt{-1})\,[l.\,r + l.\,(\text{coſ.}\,\varphi + \text{ſin.}\,\varphi\sqrt{-1})] = l.\,R + l.\,(\text{coſ.}\,\theta + \text{ſin.}\,\theta\sqrt{-1})$, & par la formule citée $(m+n\sqrt{-1})\,(l.\,r + \varphi\sqrt{-1}) = l.\,R + \theta\sqrt{-1}$, & faiſant la multiplication actuelle $m\,l.\,r - n\varphi + (n\,l.\,r + m\varphi)\sqrt{-1} = l.\,R + \theta\sqrt{-1}$, & comparant les imaginaires avec les imaginaires, & les réelles avec les réelles, on a $m\,l.\,r - n\varphi = l.\,R$, $n\,l.\,r + m\varphi = \theta$, équation, d'où l'on tirera facilement des valeurs réelles pour R & θ, & par conſéquent pour A & B qui en dépendent : car on a $R = e^{m\,l.\,r - n\varphi}$, ou bien $R = e^{m\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} - n\,\text{Arc. ſin.}\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}$ & $\theta = n\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} + m\,\text{Arc. ſin.}\,\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}$ de là $A = R\,\text{coſ.}\,\theta = e^{m\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} - n\,\text{Arc. ſin.}\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}\,\text{coſ.}\,[n\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} + m\,\text{Arc. ſin.}\,\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}]$ & $B = R\,\text{ſin.}\,\theta = e^{m\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} - n\,\text{Arc. ſin.}\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}}\,\text{ſin.}\,[n\,l.\sqrt{(a^2+b^2)} + m\,\text{Arc. ſin.}\,\frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}}]$.

Digitized by Google

CONSPECTUS TOTIUS OPERIS.

DE IIS, QUÆ IN SOCIETATE ACTA SUNT COMMENTARII A JOHANNE FRANCISCO CIGNA CONSCRIPTI.

De belliniano Problemate, ſeu de Ovorum elixatorum cicatricula.
De varia barometrorum diverſæ diametri altitudine.
De corrigendis barometrorum erroribus ex calore, & frigore natis.
De fallacia methodi dimetiendi quantitatem attractionis.
De aſcenſu, & deſcenſu thermometrorum variis liquoribus madentium ex inflato vento.
De cauſſa extinctionis flammæ in clauſo aere.

DISSERTATIONES, ET OPUSCULA VARIA.

Memoire du CHEVALIER SALUCE *ſur la nature du fluide élaſtique qui ſe développe de la Poudre à Canon.*
Recherches ſur la methode de maximis, & minimis *par M.* LOUIS DE LA GRANGE.
Sur l'intégration d'une équation différentielle à différences finies, qui contient la Théorie des ſuites récurrentes par M. LOUIS DE LA GRANGE.
JOHANNIS FRANCISCI CIGNA, *De analogia* magnetiſmi, & electricitatis *Diſſertatio.*
Ejuſdem. De colore ſanguinis experimenta nonnulla.
JOHANNIS BAPTISTAE GABER *Specimen experimentorum circa putrefactionem humorum animalium.*
Faſciculus ſtirpium Sardiniæ in Diœceſi Calaris lectarum a MICHAELE ANTONIO PLAZZA *Chirurgo Taurinenſi, quas in uſum Botanicorum recenſet* CAROLUS ALLIONIUS.

De

Digitized by Google

De glanduloſo Ovarii corpore, de utero gravido, & placenta Obſervationes AMBROSII BERTRANDI.

Suite des recherches ſur le fluide élaſtique de la poudre à Canon par le CHEVALIER SALUCE.

Recherches ſur la nature, & la propagation du ſon par M. LOUIS DE LA GRANGE.

Introduction

Section. 1. *Recherches ſur la nature du ſon.*

Cap. I. Des oſcillations des parties intimes des fluides élaſtiques.

Cap. II. Des vibrations des cordes.

Cap. III. Solution de Problême général propoſé dans les chapitres précédens.

Cap. IV. Analiſe du cas, où le nombre des corps mobiles eſt fini.

Cap. V. Analiſe du cas, où le nombre des corps mobiles eſt infini.

Cap. VI. Réflexions ſur les calculs précédens.

Cap VII. Théorie des cordes de muſique, & des flutes.

Section. 2. *De la propagation du ſon.*

Cap. I. De la viteſſe du ſon.

Cap. II. De la réflexion du ſon, ou des echos.

Cap. III. Du mélange, & du rapport des ſons.

Réflexions ſur les quantités imaginaires par M. le CHEVALIER DAVIET DE FONCENEX.

Digitized by Google

ERRATA

Pour le Mémoire ſur le fluide élaſtique qui ſe développe de la Poudre à Canon.

Pag. 9	*lin.* 33	interdiraient	*liſés*	interdirait
14	4	(*r*) Com. pag.		(*r*) Com. pag. 22.
14	12	ne peut-il		ne puiſſe

In Diſſertatione de analogia magnetiſmi, & electricitatis.

47	32	eo una vitri	ex una vitri
57	*not. b*	fecondos	ſecandos

In Diſſertatione circa putrefactionem.

75	1	quanti	quanti ad
86	5	morborum	morborum cauſſis

In faſciculo ſtirpium Sardiniae.

88	6	Allionus	Allionius
	26	integerrimus	integerrimis
89	7	Alchemilla	Alchimilla
	13	514.	524.
	16	avenis	aveniis
92	4	cordalis	cordatis
	29	norvoſis	nervoſis
96	20	refuſcente	rufeſcente
	32	Vinea	Vicia
97	5	lapaſanae	lampſanae
	29	Oenante	Oenanthe

In obſervationibus de glanduloſo Ovarii corpore.

	20	fatis	ſatis
106	10	continuatas	continuatae
108	4	ut	ac

Pour la ſuite des recherches ſur le fluide élaſtique de la Poudre.

116	20	plus bas	plus haut
129	30	dans l'eau	& de l'eau
135	27	(*a*)	(*z*)

Digitized by Google

Pour la Diſſertation ſur le ſon.

Page 11 *ligne* 1 Qui eſt la même expreſſion &c. *liſez* qui ſe réduit à la même expreſſion &c.

En effet ayant ſuppoſé dans l'art. 4. *que la force motrice dans l'echelle PHShP fût ſimplement* $= \frac{QM - MR}{HK^2} \times M$, *l'on doit de même ici exprimer les forces motrices des particules par* $\frac{M d^2 y}{dt^2}$, *ou bien ſuppoſer* $\frac{2h}{T^2} = 1$.

Page 13 *ligne* 16 on aura ſin. $efg = \frac{y''' - 2y'' + y'}{r}$, *liſez* on aura ſin. $efg = - \frac{y''' - 2y'' + y'}{r}$. *Mais cette erreur n'influe en rien dans le reſte du calcul, parceque les différentielles* d^2y *doivent être auſſi priſes négativement.*

Page 14 *ligne* 10 *mettez l'art.* 10. *avant* Imaginons.

Page 15 *ligne* 3 *au lieu de l'*art. 10. *liſez* article 11.

Page 19 *ligne* 14 de la quantité $\frac{a}{\sqrt{c}}$ *liſez* de la quantité $\frac{2a}{\sqrt{c}}$; *dans la ligne ſuivante* au bout d'un tems $\frac{a}{\sqrt{c}} = T\sqrt{(\frac{Sa}{2Pb})}$ *liſez* au bout d'un tems $\frac{2a}{\sqrt{c}} = 2T\sqrt{(\frac{Sa}{2Pb})}$; *dans la ligne* 17 c'eſt pourquoi, *liſez* mais.

Page 33 *ligne* 4 *au lieu de* (art. 20.) *poſez* (art. 21.)

Page 50 *ligne* 8 *au lieu de* Chap. III. *liſez* Chap. II.

Page 57 *ligne* 10 *au lieu de* ſin. $\frac{\pi H t}{2T}$ *liſez* coſ. $\frac{\pi H t}{2T}$;

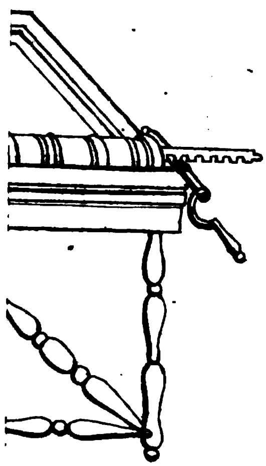
Page 71 *ligne* 16 à l'ordonnée MN, & à l'unité, *liſez* à l'ordonnée MN, & à la quantité conſtante $\frac{aH}{T}$; *dans la même page ligne* 18 aux abſciſſes $a\,m = a'm'$, *ajoutez* ces aires étant diviſées par $\frac{aH}{T}$.

Digitized by Google

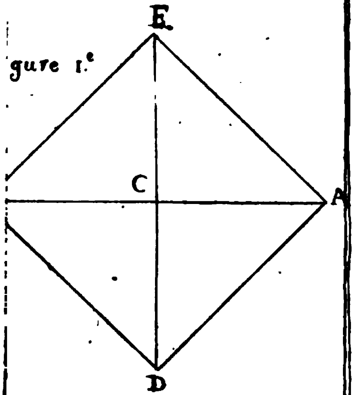
Page 102 *ligne* 9, qu'on a enſeigné article cité, *liſez* qu'on a enſeigné article 38.

Page 112 *ligne dernière* conterons, *liſez* contenterons.

Digitized by Google

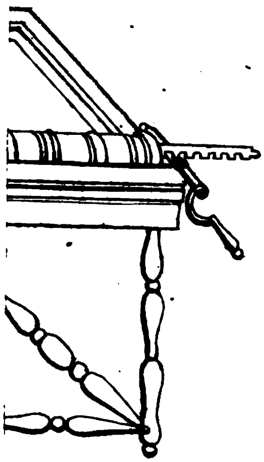


gure 1.e

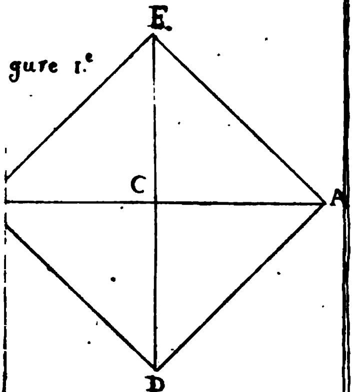


Digitized by Google

Digitized by Google



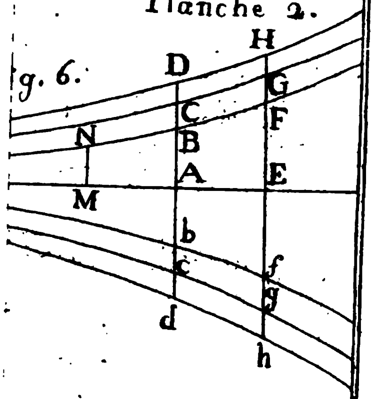
gure 1.e

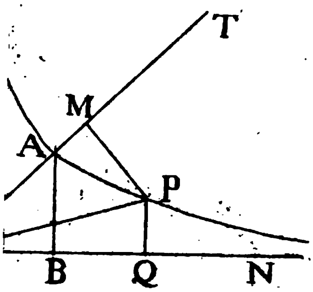


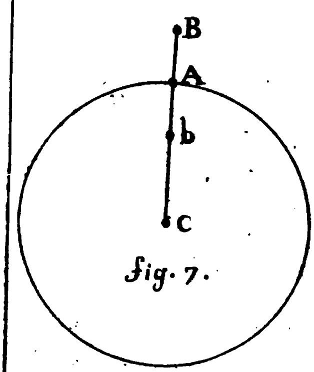
Digitized by Google

Digitized by Google

Planche 2.







ſig. 7.



ſig. 8.

Digitized by Google

Planche 3e

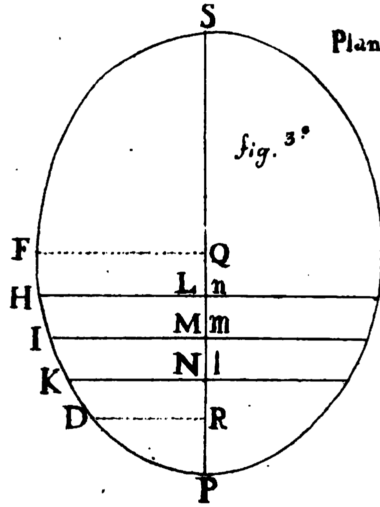


fig. 3e

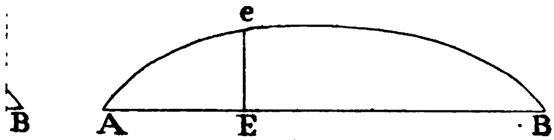


fig. 5e

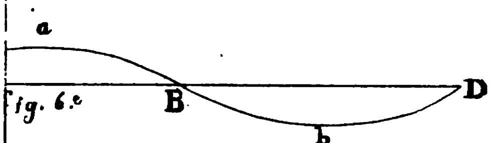


fig. 6e

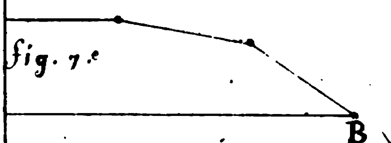
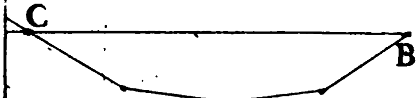


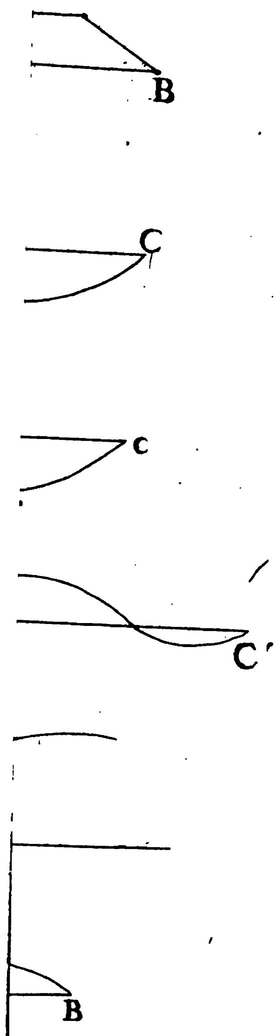
fig. 7e



Digitized by Google

Digitized by Google

Planche 4.e



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Gilu — 509 1-5

Digitized by Google

UNIVERSITY OF MICHIGAN
3 9015 06844 1354
408 1
Digitized by Google

Digitized by Google